2次元オービフォルド上のゲージ理論の境界条件に関する表現行列について

川村嘉春(信州大)、小平英治(信州大)、小島健太郎(九州大)、山下敏史(愛知医大)

※arXiv:2211.00877[hep-th]

2023年3月16日
NITEP素粒子現象論研究会(大阪公立大学)

発表者: 小平英治

目的

- 2次元オービフォルド T^2/Z_Nで、任意の境界条件の表現行列について、ゲージ同値な対角行列が存在するか否かを明らかにする。

結果

- $SU(n)$ゲージ理論について、
  T^2/Z_2、T^2/Z_3では存在する。
  T^2/Z_4、T^2/Z_6では必ずしも存在するとは限らない。

境界条件行列（ひねり行列; twist matrix）

例） 余剰空間が S^1 $(y \sim y + 2\pi R)$で、ラグランジアンの大局的対称性が$G' = U(n)$、ゲージ対称性が$SU(n)$のとき、

$$\begin{cases} \phi(x, y+2\pi R) = U\phi(x,y) \\ A_M(x, y+2\pi R) = U A_M(x,y) U^{-1}, \\ U \in G' \end{cases}$$

（Uは基本表現の表現行列） (M=0,1,2,3,5)

このように U による「ひねり」が許される。

Uの表現行列を「境界条件行列（ひねり行列）」と呼ぶ。

U（とウィルソンライン位相）により、低エネルギー有効理論における対称性が決まる。

境界条件行列の同値類

$$\phi(x,y) \to \quad \phi'(x,y) = \Omega(x,y)\phi(x,y)$$

とゲージ変換したとき、境界条件行列 U は、

$$\boxed{U \to \quad U' = \Omega(x, y+2\pi R) U \Omega(x,y)^{-1}}$$

と変換される。

ゲージ変換の前後で物理は変わらないはず

→「UとU'は同じ同値類に属する」と定義する。

(Hosotani, 1989)

- 余剰次元模型の特質を調べるとき、各同値類に含まれる境界条件行列から任意のものをひとつ選んで調べればよい。

- そのとき境界条件行列が対角型だと便利である。

↓

- 「任意の境界条件に対して、その同値類の中に、境界条件行列が対角型であるものが必ず存在する」という定理があると便利である。

||

「任意の境界条件行列はユニタリ変換（基底の変更）とゲージ変換で必ず対角化できる」

S^1の場合

$$\phi(x, y+2\pi R) = U\phi(x, y)$$

- U しかないのでユニタリ変換だけで自明に対角化できる。

$$U \rightarrow U_{\mathrm{D}}$$ （対角化）

$\uparrow$

ユニタリ変換　~~&　ゲージ変換~~

S^1/Z_2の場合

$$\begin{cases} \phi(x, y+2\pi R) = U\phi(x, y) \\ \phi(x, -y) = P\phi(x, y) \end{cases}$$

$$(U, P) \rightarrow (U_{\mathrm{D}}, P_{\mathrm{D}})$$ （同時対角化）

$\uparrow$

ユニタリ変換　&　ゲージ変換

(Haba, Hosotani & Kawamura, '04)

•しかし、S^1/Z_2以外での証明はまだない。

↓

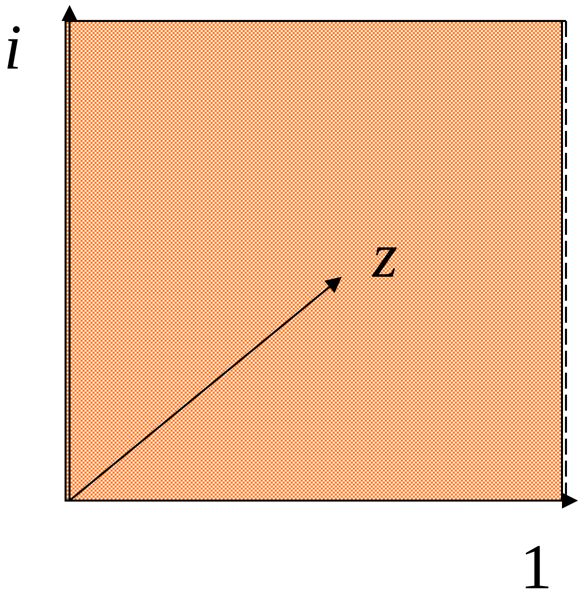
•本研究の目的

議論を2次元オービフォルドへと拡張し、T^2/Z_Nで各同値類の中に必ず対角型の境界条件行列の組があるかどうかを調べる。

||

境界条件行列の組の中の全行列をユニタリ変換(基底の変更)とゲージ変換で同時対角化することができるか

例: $T^2/\mathbb{Z}_4$



表記法として、

$$x^M = (x^0, x^1, x^2, x^3, \underbrace{x^5, x^6})$$

$$z \equiv x^5 + ix^6$$
$$\bar{z} \equiv x^5 - ix^6$$

$$x^M = (x^0, x^1, x^2, x^3, \underbrace{z, \bar{z}})$$

$2\pi R \to 1$ とする。

T^2 条件: $\left\{ \begin{array}{l} z \sim z + 1 \\ z \sim z + i \end{array} \right.$

Z_4 条件: $z \sim iz$

$$\left(\begin{array}{l} \sim -z \\ \sim -iz \end{array} \right)$$

$T^2/\mathbb{Z}_4$ の境界条件行列

$$\begin{cases} \phi(z+1) = T_1\phi(z), \\ \phi(z+i) = T_2\phi(z), \\ \phi(iz) = R_0\phi(z), \\ \vdots \end{cases}$$

$$\left(T_1, T_2, R_0, \ldots \in U(n) \right)$$

という感じで複数あるが、$T_2 = R_0 T_1 R_0^{-1}$ などの関係があるため、

$$\boxed{R_0 \text{ と } T_1 \text{ を同時対角化できれば、残りも対角化される}}$$

（回転と並進）

R_0 , T_1 の対角化:第一段階(基底の変更)

まず$R_0{}^4 = I$という条件から

部分行列

$$R_0 = \begin{pmatrix} iI_{n_1} & & & \\ & -I_{n_2} & & \\ & & -iI_{n_3} & \\ & & & I_{n_4} \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} (T_1)_{11} & (T_1)_{12} & (T_1)_{13} & (T_1)_{14} \\ (T_1)_{21} & (T_1)_{22} & (T_1)_{23} & (T_1)_{24} \\ (T_1)_{31} & (T_1)_{32} & (T_1)_{33} & (T_1)_{34} \\ (T_1)_{41} & (T_1)_{42} & (T_1)_{43} & (T_1)_{44} \end{pmatrix}$$

I_{n_k} : $n_k \times n_k$ 単位行列

その他の諸条件(T^2条件など)
とユニタリ変換を駆使

第一段階としての最終形

$$R_0 = \begin{pmatrix} R_0^{(0)} & & & \\ & R_0^{(1)} & & \\ & & R_0^{(2)} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}, \quad T_1 = \begin{pmatrix} T_1^{(0)} & & & \\ & T_1^{(1)} & & \\ & & T_1^{(2)} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(ブロック対角型の行列)

($R_0{}^{(m)}$、$T_1{}^{(m)}$については後述)

- $R_0^{(0)}$, $T_1^{(0)}$ は、この段階ですでに対角型の部分。
- $R_0^{(m)}$, $T_1^{(m)}$ $(m\neq 0)$は、T^2/Z_4の場合、4×4行列と2×2行列の2種類が出てくる。

$$
\left\{
\begin{array}{l}
R_0^{(m)} = \begin{pmatrix} i & & & \\ & -1 & & \\ & & -i & \\ & & & 1 \end{pmatrix}, \quad T_1^{(m)} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{pmatrix} \\
\\
R_0^{(m')} = \begin{pmatrix} i^k & 0 \\ 0 & -i^k \end{pmatrix}, \qquad T_1^{(m')} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
\right.
$$

（「巡回行列」の一種）

（ただしa,b,c,d間には関係式）

（$b = -d^\dagger$ など）

（k は任意の整数）

- 4×4行列の方はゲージ変換で同時対角化できるが、2×2行列の方はできない！

なぜ2×2行列のほうは対角化できないか？

第2段階：ゲージ変換による同時対角化

$$\begin{cases} R_0 \to e^{i(\Theta\tau z+\bar{\Theta}\bar{\tau}\bar{z})} R_0 e^{-i(\Theta z+\bar{\Theta}\bar{z})} = R_0 & \cdots ① \\ T_1 \to e^{i\{\Theta(z+1)+\bar{\Theta}(\bar{z}+1)\}} T_1 e^{-i(\Theta z+\bar{\Theta}\bar{z})} & \cdots ② \end{cases}$$

①は、 $R_0 \Theta R_0^{-1} = \tau\Theta$ と等価。

T^2/Z_4だと $\tau = i$ $\left[\ \tau = e^{2\pi i/N}\ \right]$

$R_0^{(m')} = \begin{pmatrix} i^k & 0 \\ 0 & -i^k \end{pmatrix}$ に対しては、$\Theta = 0$ しか解がない！

$\left[T_1^{(m')} \to T_1^{(m')}\right]$

[また、$R_0\langle A_z\rangle R_0^{-1} = \tau\langle A_z\rangle$ なので、$\langle A_z\rangle$の自由度がない。]

結果の総括

・T^2/Z_N（N=2,3,4,6）のひねり行列は、一般には

(1) 対角型の部分行列
(2) $N \times N$の非対角型の部分行列
(3) $M \times M$の非対角型の部分行列 （MはNの約数）

の３種の部分行列を含みうるブロック対角型にできる。

・(2)のような部分行列はゲージ変換で対角化できる。

・(3)のような部分行列はゲージ変換で対角化できない。

・N=4, 6のときは(3)のような部分行列が含まれうる。したがってその場合は対角化できない。

具体例

余剰空間が T^2/Z_4 の $SU(7)$ 模型（ランクは6）で、

$$R_0 = \left(\begin{array}{cc|ccccc} -1 & 0 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & 1 \end{array}\right), \quad T_1 = \left(\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 1 & & & & & \\ 1 & 0 & & & & & \\ \hline & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & -1 & & \\ & & & & & -1 & \\ & & & & & & -1 \end{array}\right)$$

を含む同値類のとき、対角型のひねり行列が存在しない。

なお、このとき左上の部分に対応する$\langle A_z \rangle$の自由度は存在しないが、この部分によって群のランクが落ち、対称性が$SU(3) \times SU(2) \times U(1)^2$（ランクは5）へと破れる。

今回の結果が持つ意味　その1

T^2/Z_N (N=2,3)のときは、全てのひねり行列を必ず対角型で表せる。

↓

ひねり行列が対角型であれば、場の真空期待値の計算などが比較的容易に行える。

↓

模型の一般的なふるまいを、比較的容易に調べられる。

今回の結果が持つ意味　その2

T^2/Z_N $(N=4,6)$のときは、同値類の中に対角型の行列が存在しないようなひねり行列が存在する。

↓

そのようなひねり行列を持つ理論では、余剰次元ゲージ場のゼロモードの真空期待値の自由度とは別の自由度で、ランクを落とすような対称性の破れが起こる。

※先行研究（Scrucca & Serone, 2004; Förste et al., 2004)では、ウィルソンライン位相が離散値をとってもランク落ちはない、としていたが、そこではZ_2だけを調べていた。
今回、Z_4とZ_6についてはランク落ちが生じることが分かった。

まとめ

- 2次元オービフォルド T^2/Z_Nで、境界条件を行列で表したとき、各同値類の中に、必ず対角型の境界条件行列の組があるか、を調べた。

結果

- $SU(n)$ゲージ理論について、
T^2/Z_2、T^2/Z_3では存在する。
T^2/Z_4、T^2/Z_6では必ずしも存在するとは限らない。

今後の課題

- 別のゲージ群や、より複雑なオービフォルドではどうなるか。
- 非対角型の境界条件を仮定した模型のふるまいはどうなるか。
- 境界条件選択を理論的に決定する機構はあるだろうか？

補足資料

補足資料

$U \rightarrow \quad U' = \Omega(x, y+2\pi R) U \Omega(x,y)^{-1}$ の導出

$\psi'(x, y+2\pi R) = U'\psi'(x,y)$ を満たせ、という条件から、

$$\psi'(x, y+2\pi R) = U'\psi'(x,y) = U'\Omega(x,y)\psi(x,y)$$
$$= \Omega(x, y+2\pi R)\psi(x, y+2\pi R)$$
$$= \Omega(x, y+2\pi R)U\psi(x,y)$$

$$\therefore U'\Omega(x,y) = \Omega(x, y+2\pi R)U$$

$$\therefore U' = \Omega(x, y+2\pi R)U\Omega(x,y)^{-1}$$

例）

$$\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}(x, y+2\pi R) = \begin{pmatrix}u_{11} & 0\\ 0 & u_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}(x, y)$$ の場合

$$\longrightarrow \quad \phi^a(x, y+2\pi R) = u_{ab}\phi^b(x, y)$$

$$\longrightarrow \quad \phi^a(x, y) = \sum_n \phi_n^a(x) e^{i\frac{n+\beta}{R}y}$$

$$\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}(x, y+2\pi R) = \begin{pmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^1\\ \phi^2\end{pmatrix}(x, y)$$ の場合

$$\longrightarrow \quad \phi^a(x, y+2\pi R) = u_{ab}\phi^b(x, y)$$

$$\longrightarrow \quad \phi^a(x, y) = ?$$

非対角型ひねり行列による、群のランク落ち

- 群のランク･･･互いに交換する生成子の数。群に固有。

- 余剰次元模型の4次元での対称性
  ･･･$\langle A_Z \rangle=0$ の既定でのひねり行列と交換する生成子で張られる。

$$\mathcal{H}^{\mathrm{sym}} = \{T^a; [T^a, R_0^{\mathrm{sym}}] = [T^a, T_1^{\mathrm{sym}}] = [T^a, T_2^{\mathrm{sym}}] = 0\}$$