

# フラックスコンパクト化された理論における ゲージ対称性の破れ

---

大阪公立大学 素粒子論研究室

赤松 拳斗 (あかまつ けんと)

Phys. Rev. D 106, 035035 (2022) [hep-th/2205.09320]

共同研究者：廣瀬拓哉, 丸信人 (阪公大, NITEP)

素粒子現象論研究会, Mar. 16, 2023 @ 学情

- Introduction
- フラックスコンパクト化
- 定数真空期待値を含む理論
- $SU(3)$  理論への拡張
- Summary

# Introduction

- Higgs 粒子

- ゲージ粒子と物質粒子に質量を与える.
  - 電弱相転移  $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$  を引き起こす.
- 2012 年に観測された → 質量は 125 GeV.

なぜこんなに軽いのか？

# Introduction

- 場の量子論

(観測される質量)<sup>2</sup>

$$= (\text{古典質量})^2 + (\text{量子補正})^2$$



パラメータ



計算可能!

Higgs 粒子

# Introduction

---

- $\Lambda$  を模型の適用上限 (UV cutoff) とすれば,

$$\underline{\underline{(\text{量子補正})^2 \propto \Lambda^2.}}$$

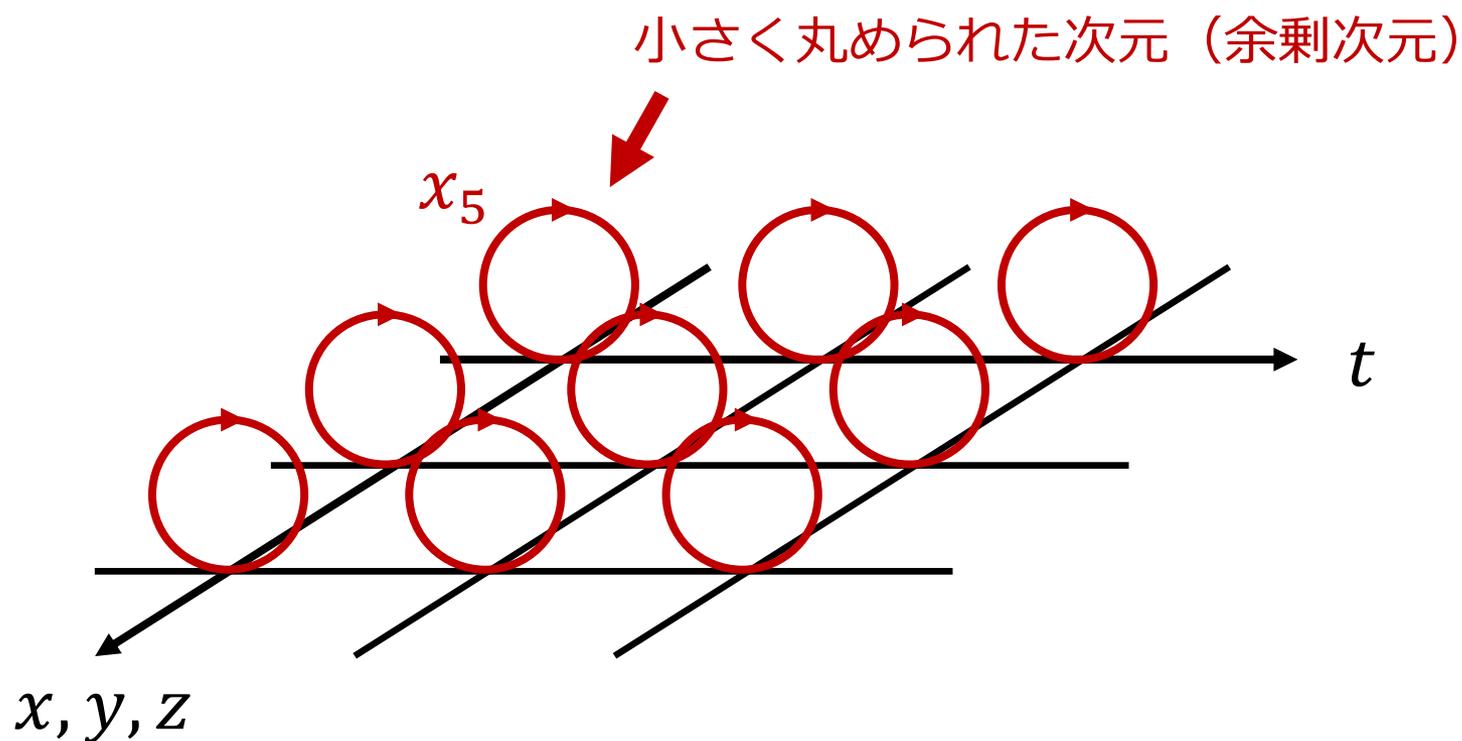
- 標準模型は重力を含まない.

$$\Lambda \lesssim 10^{19} \text{ GeV} \quad (\text{Planck スケール})$$



# フラックスコンパクト化

- コンパクト化とは？（例：5次元理論）



# フラックスコンパクト化

- フラックスとは？

- 余剰次元に存在する磁場（例：6次元理論）

$$\langle A_5 \rangle = -\frac{1}{2} f x_6, \quad \langle A_6 \rangle = \frac{1}{2} f x_5,$$

$$\langle F_{56} \rangle = f. \quad (\text{参考: } F_{23} = B_x)$$

- Wilson-line (WL) スカラー

$$\phi \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_6 + iA_5) \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} f \bar{z} + \textcircled{\varphi}, \quad z \equiv \frac{1}{2} (x_5 + ix_6).$$

Higgs 場の候補



# フラックスコンパクト化

## • フラックスコンパクト化の利点

- フラックス無しの場合 :  $\delta m_{\text{no flux}}^2 \propto L^{-2}$ .
  - $L$  はコンパクト空間の半径,  $L^{-1}$  はコンパクト化スケール.
  - 実験による制限で  $L^{-1}$  が大きく  $\rightarrow$  階層性問題が再発する.
- フラックスありの場合 :  $\delta m_{\text{flux}}^2 = 0$ .
  - W. Buchmuller, M. Dierigl and E. Dudas (2017, 2018)
  - T. Hirose and N. Maru (2019, 2021)
  - M. Honda and T. Shibusaki (2019)

# フラックスコンパクト化

- 質量補正がゼロになる理由

- WL スカラーは余剰空間上の並進対称性に対する南部-Goldstone ボソンとみなせるから.

- 例：6次元理論

- トーラス並進変換  $\delta_T \equiv \epsilon_5 \partial_5 + \epsilon_6 \partial_6$  の下で, Lagrangian は不変.

- WL スカラーの並進変換は,  $\delta_T \phi = \frac{f}{2\sqrt{2}} (\epsilon_5 + i\epsilon_6)$ .

定数シフト

- 質量項  $m^2 \phi \phi$  は  $\delta_T$  の下で, 不変でない → 禁止される.

# フラックスコンパクト化

---

- WL スカラーを Higgs 場とみなす.
  - コンパクト化スケールと独立に, TeV スケール  $v$  で余剰空間上の並進対称性を陽に破る.
  - WL スカラーの質量補正は、 $\delta m^2 \propto v^2$  になる.
- フラックスコンパクト化された理論に,  
**定数真空期待値を導入.**

# 定数真空期待値を含む理論

- Lagrangian ( $M, N = 0, 1, 2, 3, 5, 6, a = 1, 2, 3$ )
- 

$$\mathcal{L}_{tot} = -\frac{1}{4} F_{MN}^a F^{aMN} + \mathcal{L}_{g-f} + \mathcal{L}_{ghost}$$

➤ 簡単のため,  $x_{5,6} \in [0,1)$  とする.

- flux & constant VEV

$$\langle A_5^3 \rangle \equiv -\frac{1}{2} f x_6, \quad \langle A_6^3 \rangle \equiv \frac{1}{2} f x_5, \quad \underline{\underline{\langle A_6^1 \rangle \equiv v \in \mathbb{R}.}}$$

$$(\langle F_{56}^3 \rangle = f)$$

# 定数真空期待値を含む理論

- 複素座標系とスカラー場の定義

$$z \equiv \frac{1}{2}(x_5 + ix_6), \quad \partial \equiv \partial_5 - i\partial_6,$$

$$\phi^a \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(A_6^a + iA_5^a) \equiv \varphi^a + \langle \phi^a \rangle \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \langle \phi^3 \rangle = f\bar{z}/\sqrt{2} \\ \langle \phi^1 \rangle = v/\sqrt{2} \end{cases}$$

- ゴースト場を含む質量項 (Feynman ゲージ)

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} \supset -\frac{1}{2}A_\mu^a \underline{\underline{(-D\bar{D})}} A^{a\mu} \quad \text{ゲージ場}$$

$$-\bar{\varphi}^a \underline{\underline{(-D\bar{D})}} \varphi^a + gf[\varphi, \bar{\varphi}]^3 \quad \text{スカラー場}$$

$$+\bar{c}^a \left( \underline{\underline{-D\bar{D}}} + \frac{1}{2}[\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}] \right) c^a \quad \text{ゴースト場}$$

# 定数真空期待値を含む理論

- covariant derivative  $\mathcal{D}$

➤ 生成消滅演算子とみなせるか.

$$\mathcal{D}^{ac} = \begin{bmatrix} \partial & igf\bar{z} & 0 \\ -igf\bar{z} & \partial & igv \\ 0 & -igv & \partial \end{bmatrix}$$

 対角化

$$\mathcal{D}_{\text{diag}}^{ac} = \text{diag} \left( \underline{\partial - g\sqrt{f^2\bar{z}^2 + v^2}}, \partial + g\sqrt{f^2\bar{z}^2 + v^2}, \partial \right)$$

生成消滅演算子とはみなせない。  
( $v = 0$  ならできた.)

# 定数真空期待値を含む理論

- C-VEV  $v$  について,  $vL \ll 1$  を仮定する.

$$\mathcal{D}^{ac} = \underbrace{\begin{bmatrix} \partial & igf\bar{z} & 0 \\ -igf\bar{z} & \partial & 0 \\ 0 & 0 & \partial \end{bmatrix}}_{\text{無摂動 } \mathcal{D}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & igv \\ 0 & -igv & 0 \end{bmatrix}}_{\text{摂動}}$$

- ゲージ場の質量 (C-VEV  $v$  が無い理論)

$$-\mathcal{D}_{0,\text{diag}} \bar{\mathcal{D}}_{0,\text{diag}} = \begin{bmatrix} 2gf n_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2gf(n_2 + 1) & 0 \\ 0 & 0 & 4\pi^2(l^2 + m^2) \end{bmatrix}$$

Landau level

# 定数真空期待値を含む理論

- $vL \ll 1$  の下で,

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{A,n_1=0}^2 = \frac{g^2 v^2}{2} \\ m_{A,1'}^2 = 2gf(n+1) \\ m_{A,2'}^2 = 2gf(n+1) + g^2 v^2 \\ m_{A,3}^2 = 4\pi^2(l^2 + m^2) + g^2 v^2 \end{array} \right. , \left\{ \begin{array}{l} m_{\varphi,1''}^2 = m_{c,1''}^2 = 2gf\left(n + \frac{1}{2}\right) \\ m_{\varphi,2''}^2 = m_{c,2''}^2 = 2gf\left(n + \frac{1}{2}\right) + g^2 v^2 \\ m_{\varphi,3}^2 = m_{c,3}^2 = 4\pi^2(l^2 + m^2) + g^2 v^2 \end{array} \right. .$$

(1', 2', 1'', 2'' は質量固有状態.)

- $v \neq 0$  ならば,

- ゲージ対称性 :  $SU(2) \rightarrow U(1) \rightarrow$  (completely broken).
- WL スカラー ( $\varphi^3$  のゼロモード) は質量を獲得.

# 定数真空期待値を含む理論

- 古典的なポテンシャルは,

$$\begin{aligned} V_{\text{tree}} &= \int_{T^2} dx_5 dx_6 \frac{g^2}{2} \left( [\langle \phi \rangle, \langle \bar{\phi} \rangle]^2 \right)^2 \\ &= \frac{f^2}{24} (gv)^2 . \end{aligned}$$

- 古典解は  $v = 0$ .
  - ゲージ対称性の破れのパターンは変化.
  - WL スカラーの質量補正は 0.

# 定数真空期待値を含む理論

## • 1ループ有効ポテンシャル

$$V_{1\text{-loop}} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{(-1)^F}{2} N \sum_n \int \frac{d^4 p_E}{(2\pi)^4} \ln(p_E^2 + m_n^2)$$

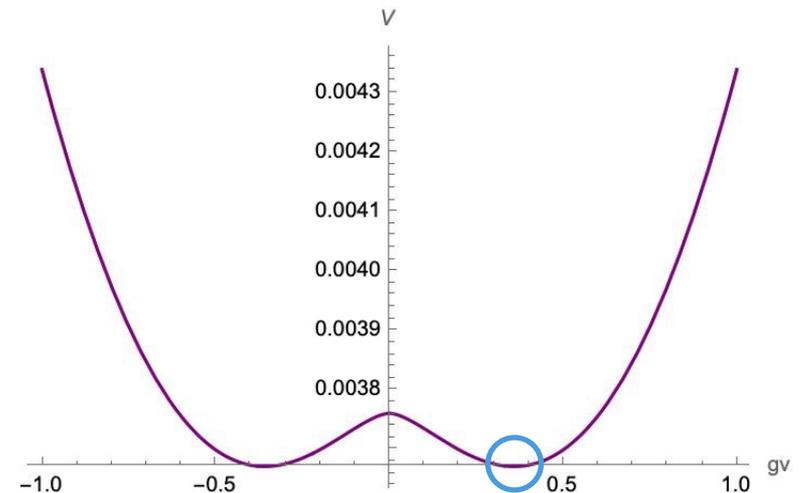
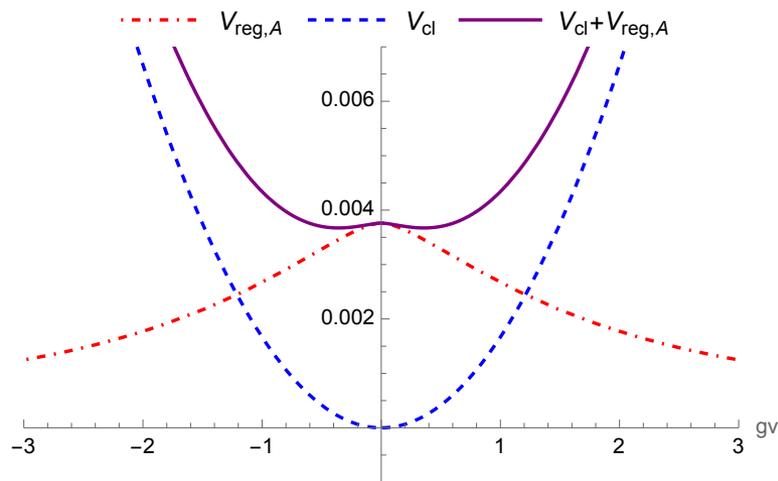
➤  $N$  は場の自由度.

➤  $F$  はボソンなら 0, フェルミオンなら 1.

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{A,n_1=0}^2 = \frac{g^2 v^2}{2} \\ m_{A,1'}^2 = 2gf(n+1) \\ m_{A,2'}^2 = 2gf(n+1) + g^2 v^2 \\ m_{A,3}^2 = 4\pi^2(l^2 + m^2) + g^2 v^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} m_{\phi,1''}^2 = m_{c,1''}^2 = 2gf \left( n + \frac{1}{2} \right) \\ m_{\phi,2''}^2 = m_{c,2''}^2 = 2gf \left( n + \frac{1}{2} \right) + g^2 v^2 \\ m_{\phi,3}^2 = m_{c,3}^2 = 4\pi^2(l^2 + m^2) + g^2 v^2 \end{array} \right.$$

# 定数真空期待値を含む理論

- $V_{\text{tree}}$  と  $V_{1\text{-loop}}$  の和



nonzero  $v$  が生成される！

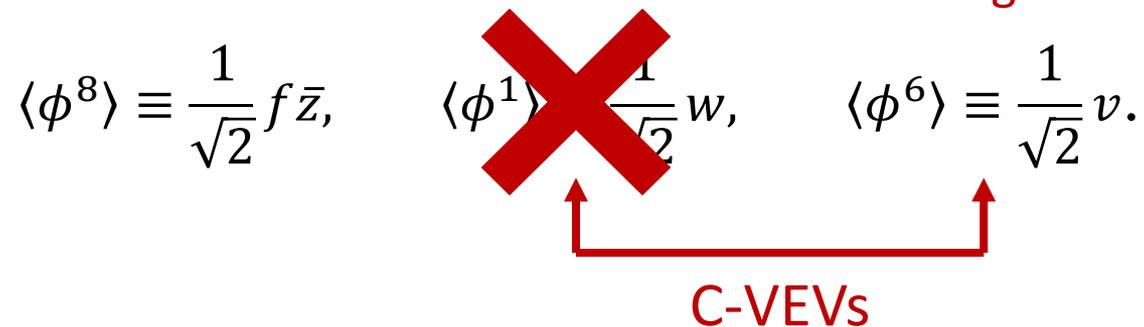


# SU(3) 理論への拡張

- SU(2) Higgs 2重項を構成する.

- SU(3) ゲージ理論が最も簡単.

$$\langle \phi^8 \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} f \bar{z}, \quad \langle \phi^1 \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} w, \quad \langle \phi^6 \rangle \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} v.$$



C-VEVs

broken generator の方向

- ポテンシャル解析より,  $v \neq 0$ .
- ゲージ対称性は,  $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$ .

電弱相転移  $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$  に類似

# Summary

---

- フラックスと定数真空期待値が原因となり、ゲージ対称性が破れる。
  - $SU(2) \rightarrow U(1) \rightarrow$  (completely broken).
  - $SU(3) \rightarrow SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$ .
- WL スカラーは,  $v$  で特徴づけられる質量を獲得.
- 定数真空期待値は量子効果により,  $v \neq 0$ .

フェルミオンを含む理論の解析



**More Information**

# Introduction

- Higgs 粒子

- ゲージ粒子と物質粒子に質量を与える.

- 電弱相転移  $SU(2) \times U(1) \rightarrow U(1)$  を引き起こす.

- 2012 年に観測された → 質量は 125 GeV.

なぜこんなに軽いのか？

by 理論屋

# Introduction

- 素粒子標準模型 (場の量子論)

(観測される質量)<sup>2</sup>

$$= (\text{古典質量})^2 + (\text{量子補正})^2$$



パラメータ



計算可能!

Higgs 粒子

# Introduction

---

- $\Lambda$  を模型の適用上限 (UV cutoff) とすれば,

$$\underline{\underline{(\text{量子補正})}^2 \propto \Lambda^2.}$$

- 標準模型は重力を含まない.

$$\Lambda \lesssim 10^{19} \text{ GeV} \quad (\text{Planck スケール})$$



## Introduction

- 質量 (の 2 乗) の量子補正 (by SM)

The diagram shows a solid red circle representing a mass correction loop. This is equal to the sum of three diagrams: a dashed red circle (Higgs field), a red star-shaped loop (gauge field), and a red circle with two arrows (top quark loop). Below each diagram is its corresponding label in Japanese: 質量補正, ヒッグス場, ゲージ場, and トップクォーク.

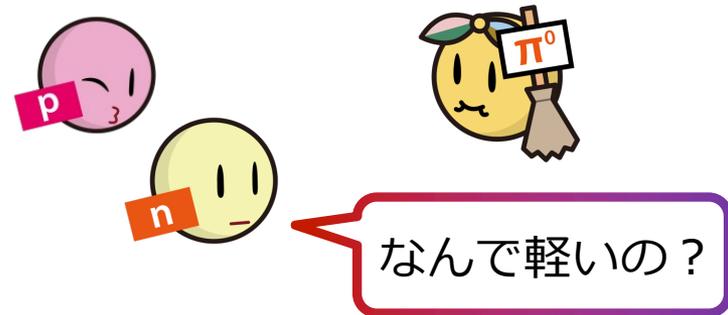
$$= \frac{\Lambda^2}{16\pi^2} \left[ 6\lambda + \frac{9g^2 + 3g'^2}{4} - 6y_t^2 \right]$$

➤ ただし,  $\Lambda$  は UV cutoff,  $\lambda, g, g', y_t$  は結合定数.

# Introduction

- ハドロンの中でパイ中間子は非常に軽い

- 陽子・中性子は 1 GeV
- パイ中間子は 140 MeV



- カイラル対称性

クォークの質量が

カイラル対称性が

パイ中間子は

{  
ない  
と  
ある

と

{  
自発的に破れ、  
陽に破れ、

{  
(massless) NG boson  
(massive) pseudo NG boson

# フラックスコンパクト化

## ● Lagrangian の詳細

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_6 &= -\frac{1}{4} F_{MN}^a F^{aMN} \\
 &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial^\mu \phi^a - \frac{1}{2} D A_\mu^a \bar{D} A^{a\mu} \\
 &\quad - \frac{i}{\sqrt{2}} (\partial_\mu \phi^a \bar{\partial} A^{a\mu} - \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial A^{a\mu}) \\
 &\quad + ig (\partial_\mu \phi^a [A^\mu, \bar{\phi}]^a + \partial^\mu \bar{\phi}^a [A_\mu, \phi]^a) \\
 &\quad - \frac{1}{4} (D \bar{\phi}^a + \bar{D} \phi^a + \sqrt{2} g [\phi, \bar{\phi}]^a)^2
 \end{aligned}$$

# フラックスコンパクト化

- the detail of the Lagrangian

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} D_\mu A^{a\mu} D_\nu A^{a\nu} - \partial_\mu \bar{\phi}^a \partial^\mu \phi^a$$

$$-\frac{1}{2} D A_\mu^a \bar{D} A^{a\mu} - \frac{g}{\sqrt{2}} (\partial \bar{\phi}^a - \bar{\partial} \phi^a) [A_\mu, A^\mu]^a$$

$$+\frac{\xi}{4} (\mathcal{D} \bar{\phi}^a - \bar{\mathcal{D}} \phi^a)^2 + ig (\partial_\mu \phi^a [A^\mu, \bar{\phi}]^a + \partial^\mu \bar{\phi}^a [A_\mu, \phi]^a)$$

$$-\frac{1}{4} (D \bar{\phi}^a + \bar{D} \phi^a + \sqrt{2} g [\phi, \bar{\phi}]^a)^2 - \bar{c}^a (D_\mu D^\mu + \xi D_m \mathcal{D}^m) c^a$$

# 定数真空期待値を含む理論

- The mass terms in Feynman gauge

$$\mathcal{L}_{\text{tot}} \supset -\frac{1}{2} A_{\mu}^a (-\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}) A^{a\mu} \quad \text{gauge field}$$

$$-\bar{\varphi}^a (-\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}}) \varphi^a + gf[\varphi, \bar{\varphi}]^3 \quad \text{scalar field}$$

$$+\bar{c}^a \left( -\mathcal{D}\bar{\mathcal{D}} + \frac{1}{2} [\mathcal{D}, \bar{\mathcal{D}}] \right) c^a \quad \text{ghost field}$$

- The covariant derivatives

$$\mathcal{D}^{ac} = \begin{bmatrix} \partial & igf\bar{z} & 0 \\ -igf\bar{z} & \partial & igv \\ 0 & -igv & \partial \end{bmatrix}, \bar{\mathcal{D}}^{ac} = \begin{bmatrix} \bar{\partial} & -igfz & 0 \\ igfz & \bar{\partial} & -igv \\ 0 & igv & \bar{\partial} \end{bmatrix}$$

# 定数真空期待値を含む理論

- the creation and annihilation operators

$$a \equiv \frac{i}{\sqrt{\alpha}} (\bar{\partial} + gfz), \quad a^\dagger \equiv \frac{i}{\sqrt{\alpha}} (\partial - gf\bar{z})$$

- their mode functions

$$\xi_{n,j} = \frac{(2|N|)^{1/4}}{2\pi L(2^n n!)^{1/2}} \sum_{a=-\infty}^{\infty} \Theta_a^j(z + \zeta) H_n \left( \sqrt{2\pi|N|} \left( \text{Im}(z + \zeta) + \frac{j}{|N|} + a \right) \right)$$

$$\Theta_a^j(z + \zeta) \equiv e^{-\pi|N| \left( \text{Im}(z + \zeta) + \frac{j}{|N|} + a \right)^2 + i\pi|N| \text{Re}(z + \zeta) \left( \text{Im}(z + \zeta) + 2 \left( \frac{j}{|N|} + a \right) \right)}$$

$$a\xi_{0,j} = 0, \quad \xi_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n \xi_{0,j}$$

# 定数真空期待値を含む理論

- Degenerate Perturbation Theory

- There is degeneracy.

$$\begin{cases} 2gf n_1 \Big|_{n_1=n_2+1} = 2gf(n_2 + 1) \\ 2gf \cdot 0 = 4\pi^2(0^2 + 0^2) \end{cases}$$

- the secular equation
- We find the effect of the constant VEV with the first-order perturbation energy.

# 定数真空期待値を含む理論

- degeneracy

$$\begin{cases} H_0 \psi_{1,n}^{(0)} = \alpha(n+1) \psi_{1,n}^{(0)}, \\ H_0 \psi_{2,n}^{(0)} = \alpha(n+1) \psi_{2,n}^{(0)} \end{cases}$$

- the secular equation

$$\begin{vmatrix} \langle 1, n | V | 1, n \rangle - E_n^{(1)} & \langle 1, n | V | 2, n \rangle \\ \langle 2, n | V | 1, n \rangle & \langle 2, n | V | 2, n \rangle - E_n^{(1)} \end{vmatrix} = 0$$

- The degeneracy is resolved if  $E_n^{(1)} \neq 0$ .

# 定数真空期待値を含む理論

- the Schwinger representation

$$\begin{aligned}
 V_n(v) &\equiv \sum_n \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \ln(p^2 + \alpha(n+1) + g^2 v^2) \\
 &= -\frac{\alpha^2}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dy e^{-g^2 v^2 y/\alpha}}{y^3 (e^y - 1)}
 \end{aligned}$$

diverges at  $y = 0$

- the integral representation of the Hurwitz  $\zeta$  function

$$\zeta(s, a) = \frac{a^{-s}}{2} + \frac{a^{1-s}}{s-1} + \frac{sa^{-s-1}}{12} + \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty dy \frac{e^{-ay}}{y^{1-s}} \left( \frac{1}{e^y - 1} - \frac{1}{y} + \frac{1}{2} - \frac{y}{12} \right)$$

- $s = -2 + \epsilon, (\epsilon \ll 1)$

work as the regulators

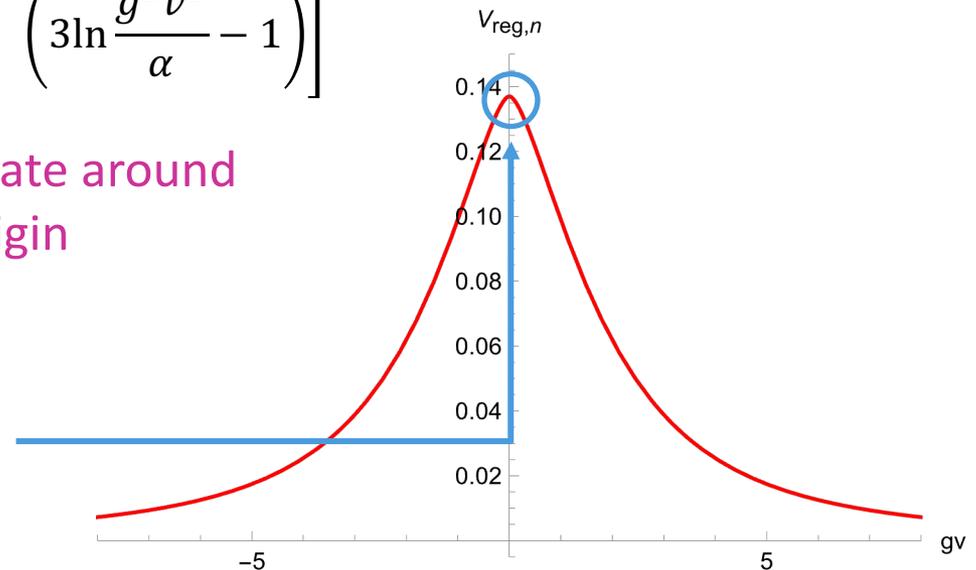
# 定数真空期待値を含む理論

- the regularized  $V_n(v)$

$$\begin{aligned}
 & V_{\text{reg},n}(v) \\
 &= -\frac{\alpha^2}{32\pi^2} \left[ \zeta^{(1,0)}\left(-2, \frac{g^2 v^2}{\alpha}\right) - \frac{1}{12} \frac{g^2 v^2}{\alpha} \left(2 \ln \frac{g^2 v^2}{\alpha} + 1\right) \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} \left(\frac{g^2 v^2}{\alpha}\right)^2 \ln \frac{g^2 v^2}{\alpha} - \frac{1}{9} \left(\frac{g^2 v^2}{\alpha}\right)^3 \left(3 \ln \frac{g^2 v^2}{\alpha} - 1\right) \right]
 \end{aligned}$$

dominate around  
the origin

convex upward!



# 定数真空期待値を含む理論

- $m^2 = g^2 v^2 / 2$

$$V_{\text{reg},0} = \frac{(g^2 v^2)^2}{2304\pi^2} \left( \frac{9\zeta(3)}{\pi^2} - 1 \right) \geq 0$$

- $m_{l,m}^2 = 4\pi^2(l^2 + m^2) + g^2 v^2$

$$V_{\text{reg},l,m} = -\frac{(g^2 v^2)^{3/2}}{\pi^3} \sum_{r,s>0} \left( \frac{1}{r^2 + s^2} \right)^{3/2} K_3 \left( gv\sqrt{r^2 + s^2} \right) \\ + \frac{(g^2 v^2)^3}{4608\pi^3} \left( \frac{9\zeta(3)}{\pi^2} - 1 \right)$$

- $K_3(z)$  is the modified Bessel function of the second kind.

# Work in Progress

- 現在は、**フェルミオンを含む理論**を解析中。

- トーラス並進不変ではない積分が現れる。

$$\int_0^1 d^2x \xi_{n,j} \xi_{m,j} \quad (n, m = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

ただし、 $\xi_{n,j}$  は以下を満たすモード関数。

$$-\frac{i}{\sqrt{2gf}}(\bar{\partial} + gfz)\xi_{0,j} = 0, \quad \xi_{n,j} = \frac{1}{\sqrt{n!}} \left( -\frac{i}{\sqrt{2gf}}(\partial - gf\bar{z}) \right)^n \xi_{0,j}$$

- ゲージ場の質量の計算にも関与する。