確率的手法を用いた
ドジッター時空中の真空崩壊率

宮地大河(神戸大)
共同研究者：早田次郎(神戸大)、徳田 順生(CTPU, IBS)
(現在論文準備中)

素粒子現象論研究会2022、2023年3月17日、大阪公立大学

目次

1. 導入

2. 確率的手法 (Review)

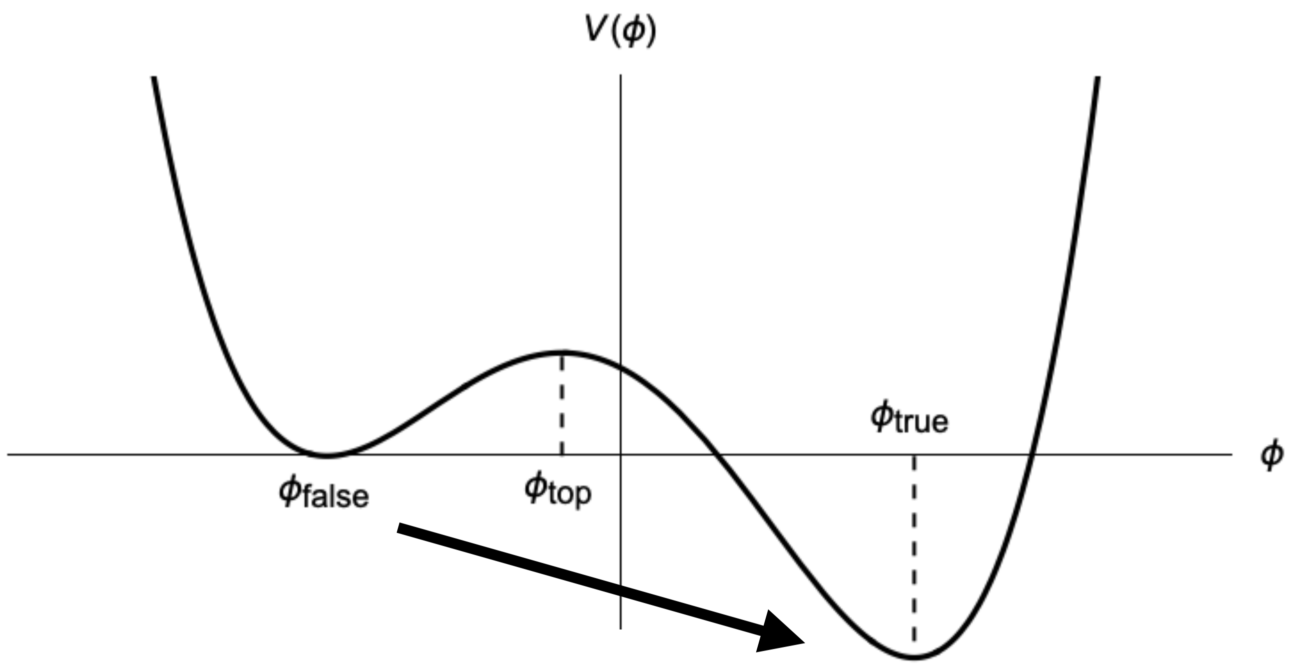
3. 経路積分表示と真空崩壊率 (Our work)

目次

偽の真空崩壊

偽の真空崩壊 = 場の量子論におけるトンネリング

スカラー場のポテンシャル



真空崩壊

Eg) ・Inflation models (Old inflation, Chain inflation)

・String theory landscape

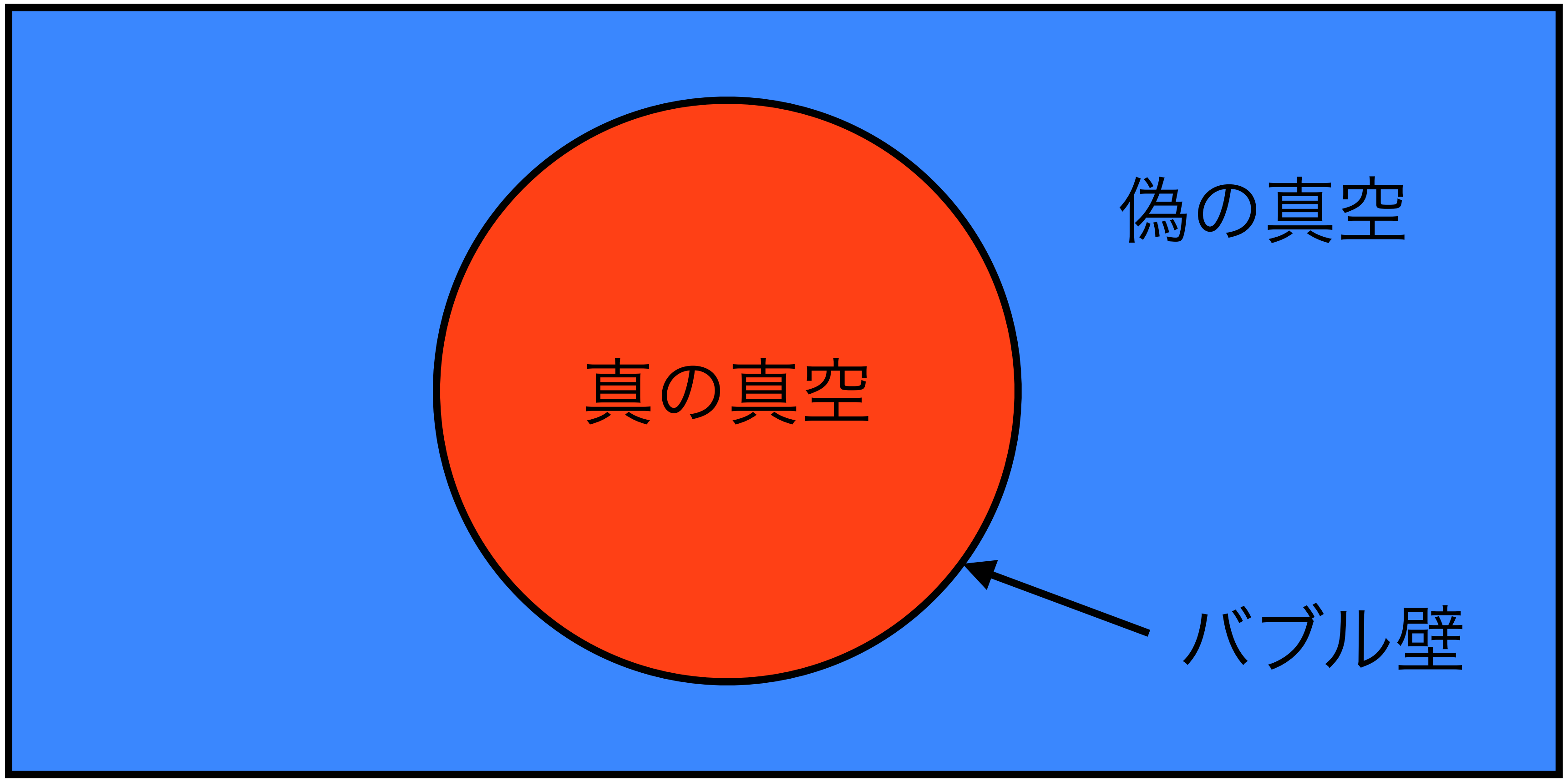
・Axion monodromy

・Extended Higgs sector

真空崩壊で何が起こるか？

バブルが現れる (過冷却水に類似した現象)

S. R. Coleman (1977)



Bubble phenomena

- Gravitational wave from bubble collisions
- Electro weak baryogenesis
- Primordial black hole

真空崩壊率の計算法

・通常、真空崩壊率の計算は虚時間法を用いる。

$$\Gamma = Ae^{-S_E[\phi]}$$ (A：量子補正, $S_E[\phi]$：ユークリッド作用)

・ユークリッド作用 $S_E[\phi]$ は鞍点解で評価する。

C.G. Callan and S. R. Coleman (1977)

・de Sitter 時空の場合2つの鞍点解がある。

- Coleman-De Luccia (CDL)：バブルが出現する
- Hawking-Moss (HM)：$\phi = \phi_{top}$ (=const.)

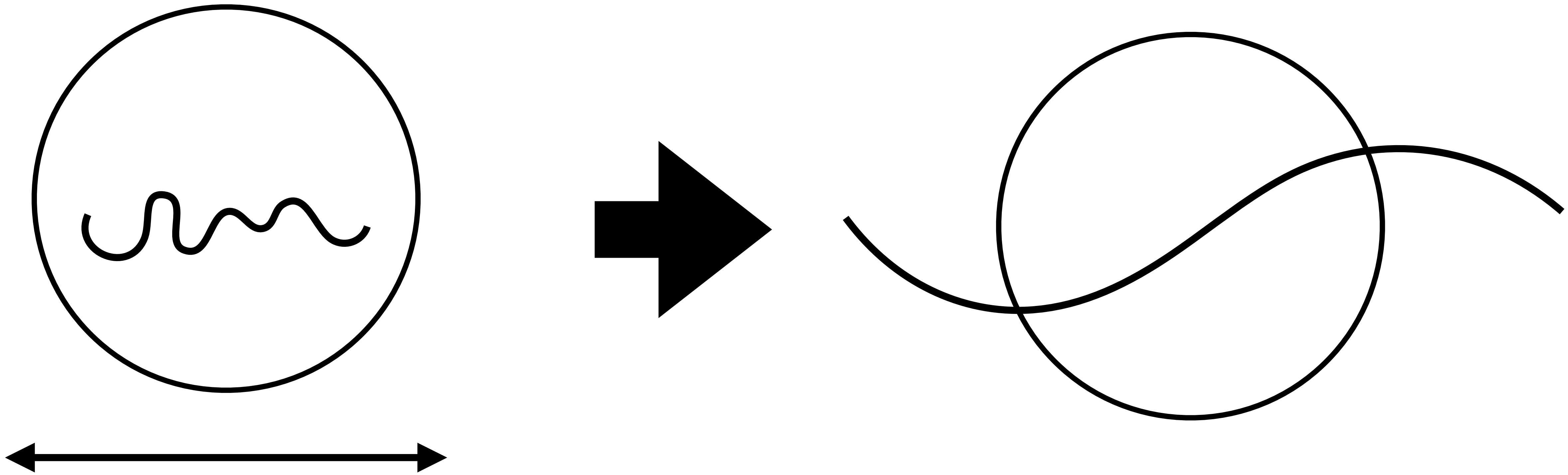
・HMを偽の真空から真の真空への遷移と解釈するのは困難。

$\boxed{\text{確率的手法を用いてCDL, HMを実時間で記述する。}}$

目次

Stochastic approach のアイデア

(量子的な)短波長モード(UV)は空間の加速膨張で
引き伸ばされ、(古典的な)長波長モード(IR)になる。



$$\sim \frac{1}{\varepsilon H}$$

A. A. Starobinsky and J. Yokoyama (1994)

長波長モードは古典的に扱う。
長波長モードに転じていく効果はノイズとして表す。

Langevin equationの導出1

Klein-Gordon 方程式 (in de Sitter spacetime)

$$\partial_t^2\phi + 3H\partial_t\phi - \frac{1}{a^2}\nabla^2\phi + \frac{\partial V}{\partial\phi} = 0$$

場と共役運動量をIRとUVのパートに分ける。

$$\hat{\phi} = \phi_{IR} + \hat{\phi}_{UV}$$
$$\hat{\pi} = \pi_{IR} + \hat{\pi}_{UV}$$

$\hat{\phi}_{UV}$ は次のようなモード展開をしている。($k_c = \epsilon a(t)H$)

$$\hat{\phi}_{UV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\theta(k-k_c)[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\phi_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger\phi_k^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

$$\hat{\pi}_{UV} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\theta(k-k_c)[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\dot{\phi}_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}_{\boldsymbol{k}}^\dagger\dot{\phi}_k^*(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

Langevin equationの導出2

また、モード関数$\phi_k(t)$は次をみたす。

$$\partial_t^2 \phi_{\boldsymbol{k}} + 3H\partial_t \phi_{\boldsymbol{k}} + \frac{k^2}{a^2}\phi_{\boldsymbol{k}} + \frac{\partial^2 V(\phi_{IR})}{\partial \phi^2}\phi_{\boldsymbol{k}} = 0$$

この時、Klein-Gordon方程式は次のようになる。

$$\dot{\phi}_{IR} = a^{-3}\pi_{IR} + \xi^{\phi}$$

$$\dot{\pi}_{IR} = a\,\nabla^2 \phi_{IR} - a^3 \frac{\partial V}{\partial \phi} + \xi^{\pi}$$

ここで、ξ^{ϕ}, ξ^{π} はUVパートからくる量子的なノイズ

$$\xi^{\phi} = \dot{k}_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta(k - k_c)[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\phi_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\phi^*_k(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

$$\xi^{\pi} = \dot{k}_c \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\delta(k - k_c)[\hat{a}_{\boldsymbol{k}}\dot{\phi}_k(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}} + \hat{a}^{\dagger}_{\boldsymbol{k}}\dot{\phi}^*_k(t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}}]$$

Langevin 方程式

- Langevin方程式

$$\dot{\phi}_{IR} = a^{-3}\Pi_{IR} + \xi^{\phi}$$
$$\dot{\Pi}_{IR} = a\nabla^2\phi_{IR} - a^3 V'(\phi_{IR}) + \xi^{\Pi}$$

$a(t) = e^{Ht}$：スケール因子

de Sitter 時空中のKlein-Gordon 方程式にノイズ ξ が加わった確率微分方程式

ノイズは以下の統計性に従う

$$< \xi^{\alpha}(t, \mathrm{x}) >_{\xi} = 0, \quad (\alpha, \beta = \phi, \Pi),$$
$$< \xi^{\alpha}(t, \mathrm{x})\xi^{\beta}(t', \mathrm{x}') >_{\xi} = \frac{1}{2\pi^2}\dot{k}_c(t)k_c(t)^2\frac{\sin(k_c(t)r)}{k_c(t)r}\mathrm{Re}[g^{\alpha\beta}(t)]\delta(t-t'),$$

$k_c(t) := \varepsilon a(t)H$：長波長と短波長を分けるカットオフスケール

Bunch-Davies 真空 1

$g^{\alpha\beta}(t)$ はモード関数で決まる関数

$$\begin{cases} g^{\phi\phi}(t) := |\phi_{k_c}(t)|^2 \\ g^{\Pi\Pi}(t) := a(t)^6 |\dot{\phi}_{k_c}(t)|^2 \\ g^{\phi\Pi}(t) = (g^{\Pi\phi})^* := a(t)^3 \phi_{k_c}(t) \dot{\phi}^*_{k_c}(t) \,. \end{cases}$$

$\phi_k(t)$：以下の方程式に従うモード関数 (真空の選び方に依存)

$$\ddot{\phi}_k + 3H\dot{\phi}_k + a^{-2}k^2\phi_k + V''(\phi_{IR})\phi_k = 0$$

ここではBunch-Davies 真空を選ぶ。

$$\phi_k \to -\frac{H\eta}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta}, \quad (-k\eta \to \infty)$$ (無限の過去でMinkowski真空)

Bunch-Davies 真空 2

さらに $\dfrac{k^2}{a^2} > \dfrac{k_c^2}{a^2} = \epsilon^2 H^2 \gg |V''|$ を課すと

$$\phi_k = \frac{H\eta}{\sqrt{2k}}\left(\frac{1}{-ik\eta} - 1\right)e^{-ik\eta}$$

Bunch-Davies 真空における$g^{\alpha\beta}(t)$

$$\begin{cases} g^{\phi\phi} = \frac{H^2\eta^2}{2k_c}\left(\frac{1}{k_c^2\eta^2} + 1\right) = \frac{1}{2a^3H}\left(\varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-1}\right) \\ g^{\Pi\Pi} = \frac{k_c}{2H^2\eta^2} = \frac{a^3H}{2}\varepsilon \\ g^{\phi\Pi} = g^{\Pi\phi *} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k_c\eta} + i\right) = -\frac{1}{2}\varepsilon^{-1} + \frac{i}{2} \end{cases}$$

Stochastic approachとトンネリング

- ノイズの寄与によって、偽の真空から真の真空へのトンネリングが起こる。
  cf : Kramers escape problem

利点

- 全て実時間で記述されている
- 真空の選び方は $g^{\alpha\beta}(t)$ にしか影響を及ぼさない。

$$\begin{cases} g^{\phi\phi}(t) := |\phi_{k_c}(t)|^2 \\ g^{\Pi\Pi}(t) := a(t)^6 |\dot{\phi}_{k_c}(t)|^2 \\ g^{\phi\Pi}(t) = (g^{\Pi\phi})^* := a(t)^3 \phi_{k_c}(t) \dot{\phi}^*_{k_c}(t) \end{cases}$$

では真空崩壊率はどのように定義するか？

目次

経路積分表示

- 簡単のため、$\varepsilon \ll 1$, 一様性($\nabla^2 \phi \sim 0$), slow-roll近似を課す

$$\dot{\phi}_{IR} = -\frac{1}{3H} V'(\phi_{IR}) + \xi^{\phi}$$

$$< \xi^{\phi}(t) > = 0, \quad < \xi^{\phi}(t) \xi^{\phi}(t') > = \frac{H^3}{4\pi^2} \delta(t - t')$$

- このLangevin方程式に対して以下の遷移確率が導出できる。

$$p(\phi, t \,|\, \phi', t') = \int_{\phi(t')=\phi'}^{\phi(t)=\phi} \mathscr{D}(\phi, p^{\phi}) \, \exp\left[\int dt \left(p^{\phi} \dot{\phi} - H(\phi, p^{\phi}) \right) \right],$$

$$H(\phi, p^{\phi}) := -\frac{V'}{3H} p^{\phi} - \frac{H^3}{8\pi^2} (p^{\phi})^2$$

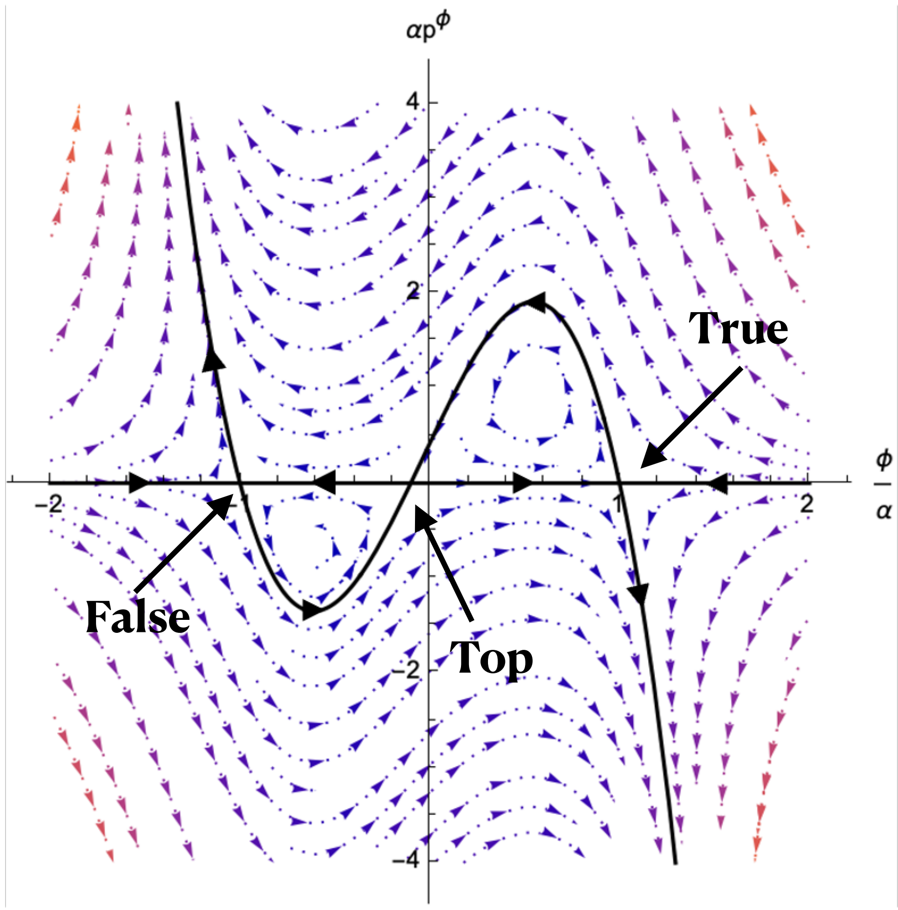
ノイズの寄与

Martin–Siggia–Rose–Janssen–de Dominicis (MSRJD) functional integral

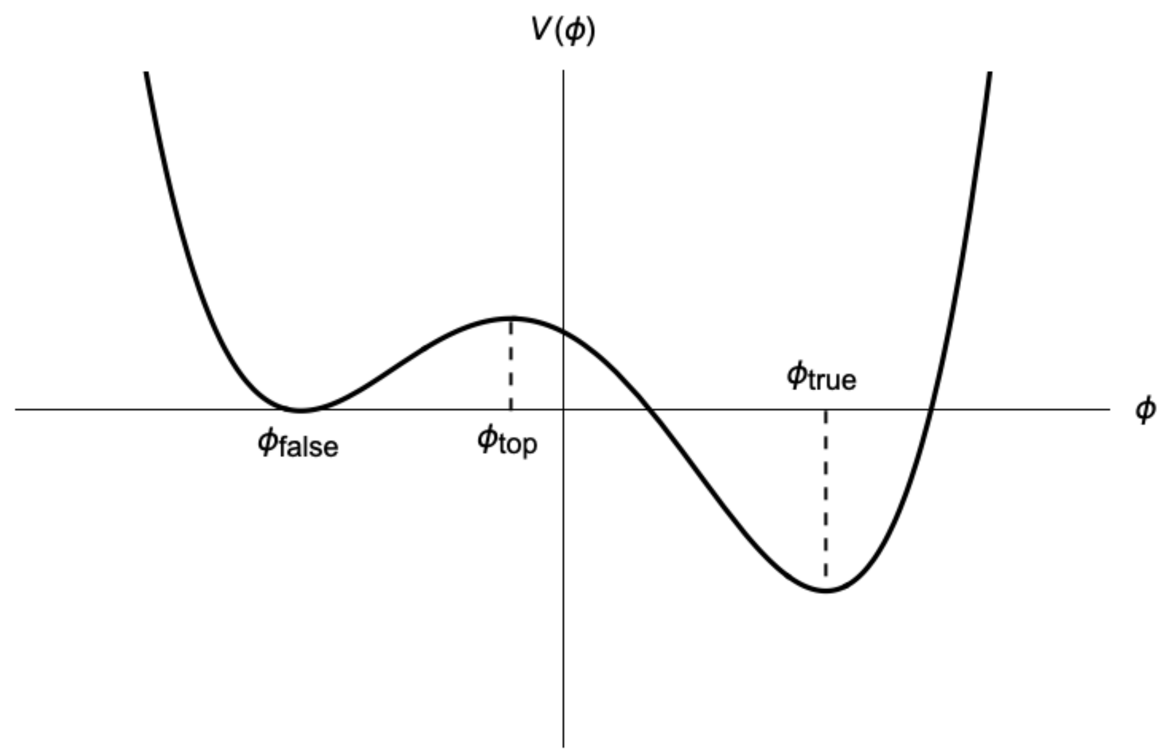
この表式を鞍点近似して真空崩壊率を計算する。

Hamilton Flow

“ハミルトニアン” $H(\phi, p^\phi)$ に対する位相空間(ϕ, p^ϕ)上のflow



黒線は$H(\phi, p^\phi) = 0$を満たすflow



Cf : “Condensed matter field theory” (A. Altland and B. Simons)

$\boxed{\text{偽の真空から真の真空に至るflowが存在する。}}$

このflowに対する”作用”を計算すると、Hawking-Mossインスタントンの結果と一致する。

Hawking-Moss action

- ハミルトニアン

$$H(\phi, p^{\phi}) := -\frac{V'}{3H}p^{\phi} - \frac{H^3}{8\pi^2}(p^{\phi})^2$$

- $H(\phi, p^{\phi}) = 0$ を満たす配位

$$p^{\phi} = 0,\ -\frac{8\pi^2}{3H^4}V'$$

- 非自明な配位 $p^{\phi} \neq 0$ に対する方程式

$$\dot{\phi} = \frac{V'}{3H}, \quad (p^{\phi} \neq 0)$$

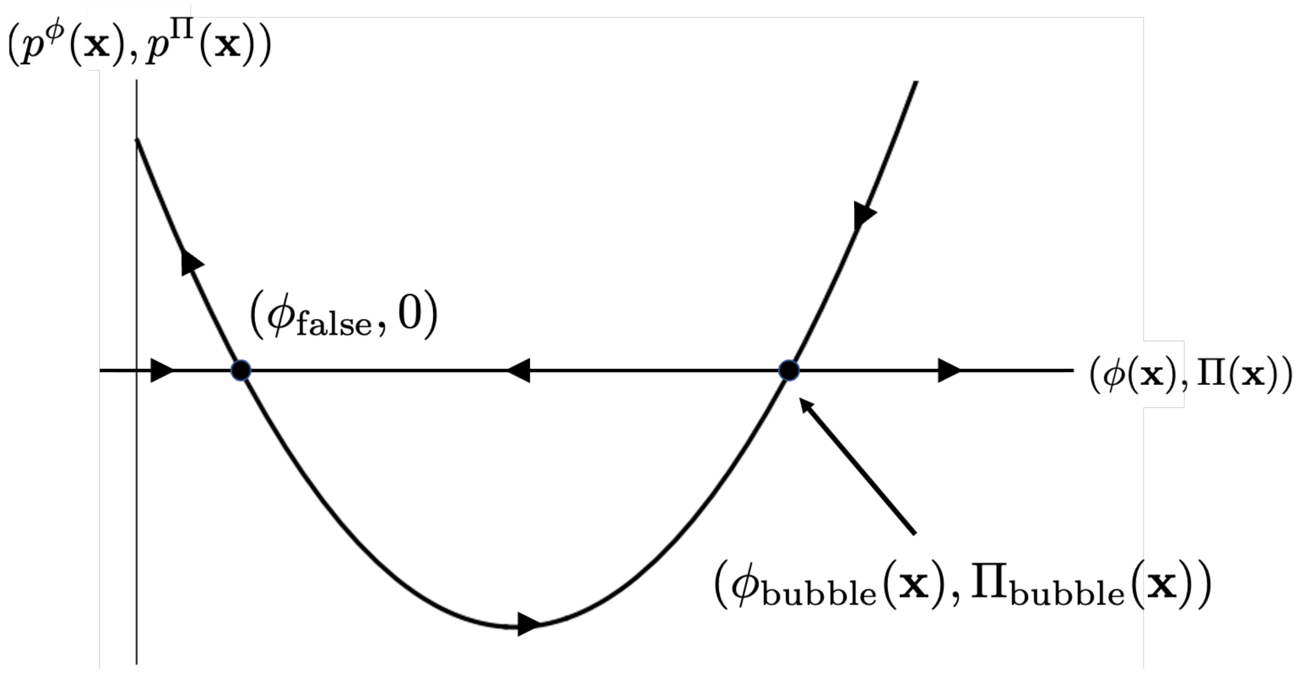
- トンネリング配位に対する作用

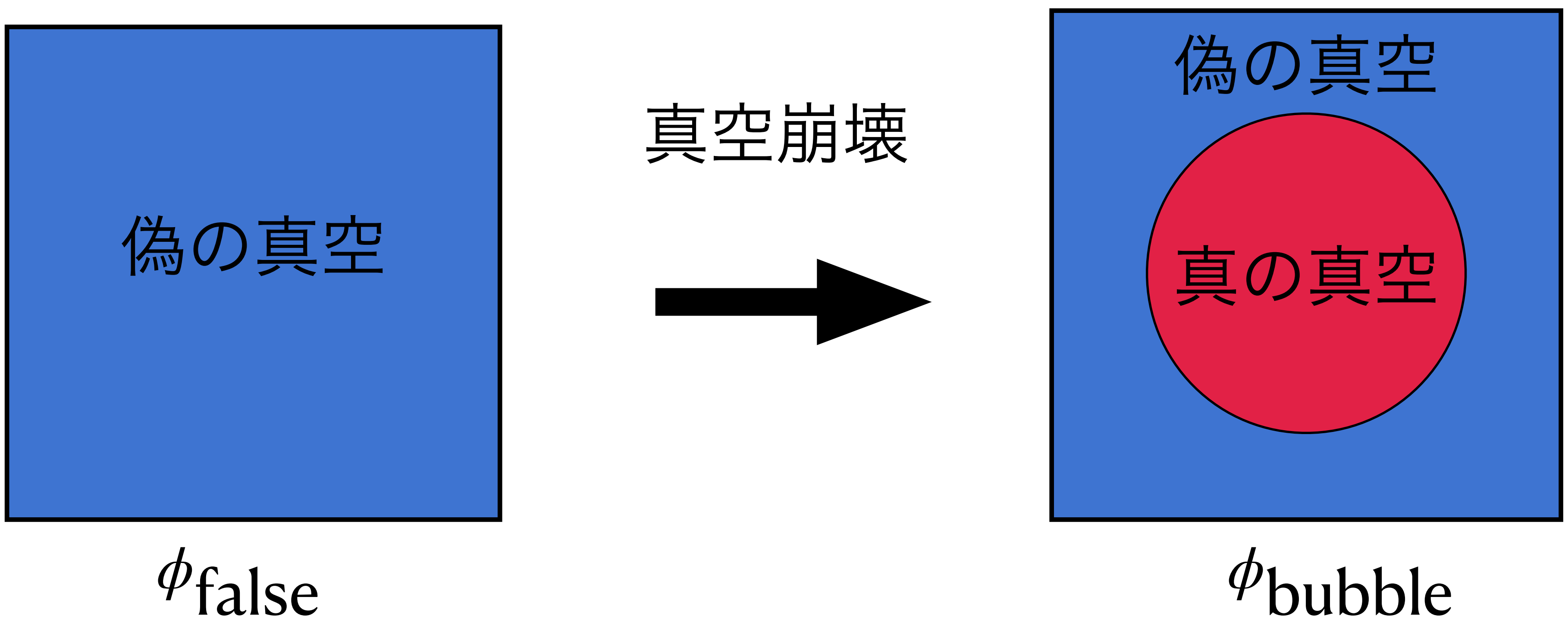
$$I_{HM} = \int dt(p^{\phi}\dot{\phi} - H(\phi, p^{\phi})) = -\frac{8\pi^2}{3H^4}\int_{t'}^{t_*} dt\dot{\phi}V' = -\frac{8\pi^2}{3H^4}\Delta V$$

バブルの生成は記述できるか？

バブルの出現を記述することもできないか？ →Yes!

イメージ





近似のない経路積分表示

- 近似なしのLangevin方程式から得られる経路積分表示

$$p(\phi(\mathrm{x}),\Pi(\mathrm{x}),t\,|\,\phi'(\mathrm{x}),\Pi'(\mathrm{x}),t') = \int_{(\phi(t',\mathbf{X}),\Pi(t',\mathbf{X}))=(\phi'(\mathbf{X}),\Pi'(\mathbf{X}))}^{(\phi(t,\mathbf{X}),\Pi(t,\mathbf{X}))=(\phi(\mathbf{X}),\Pi(\mathbf{X}))} \mathscr{D}(\phi,\Pi,p^\phi,p^\Pi)$$

$$\times \exp\left[\int d^4x\left(p^\phi\dot{\phi}+p^\Pi\dot{\Pi}-H(\phi,\Pi,p^\phi,p^\Pi)\right)\right]$$

$$H(\phi,\Pi,p^\phi,p^\Pi) := a^{-3}\Pi p^\phi + (a\nabla^2\phi - a^3V')p^\Pi \underbrace{- \frac{1}{2}\int d^4x' \sum_{\alpha,\beta} p^\alpha(x)G^{\alpha\beta}(x,x')p^\beta(x')}_{\text{ノイズの寄与}}$$

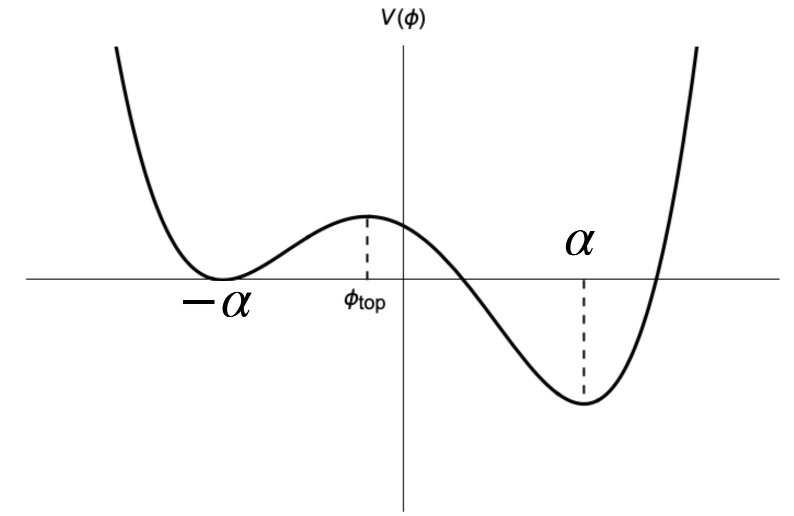
- $\varepsilon \gg 1$の仮定の下で、$H(\phi,\Pi,p^\phi,p^\Pi)=0$ を満たす非自明なflowに対する以下の運動方程式を得られた。

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = V' - a^{-2}\nabla^2\phi, \quad (p^\phi = 0,\ p^\Pi \neq 0)$$

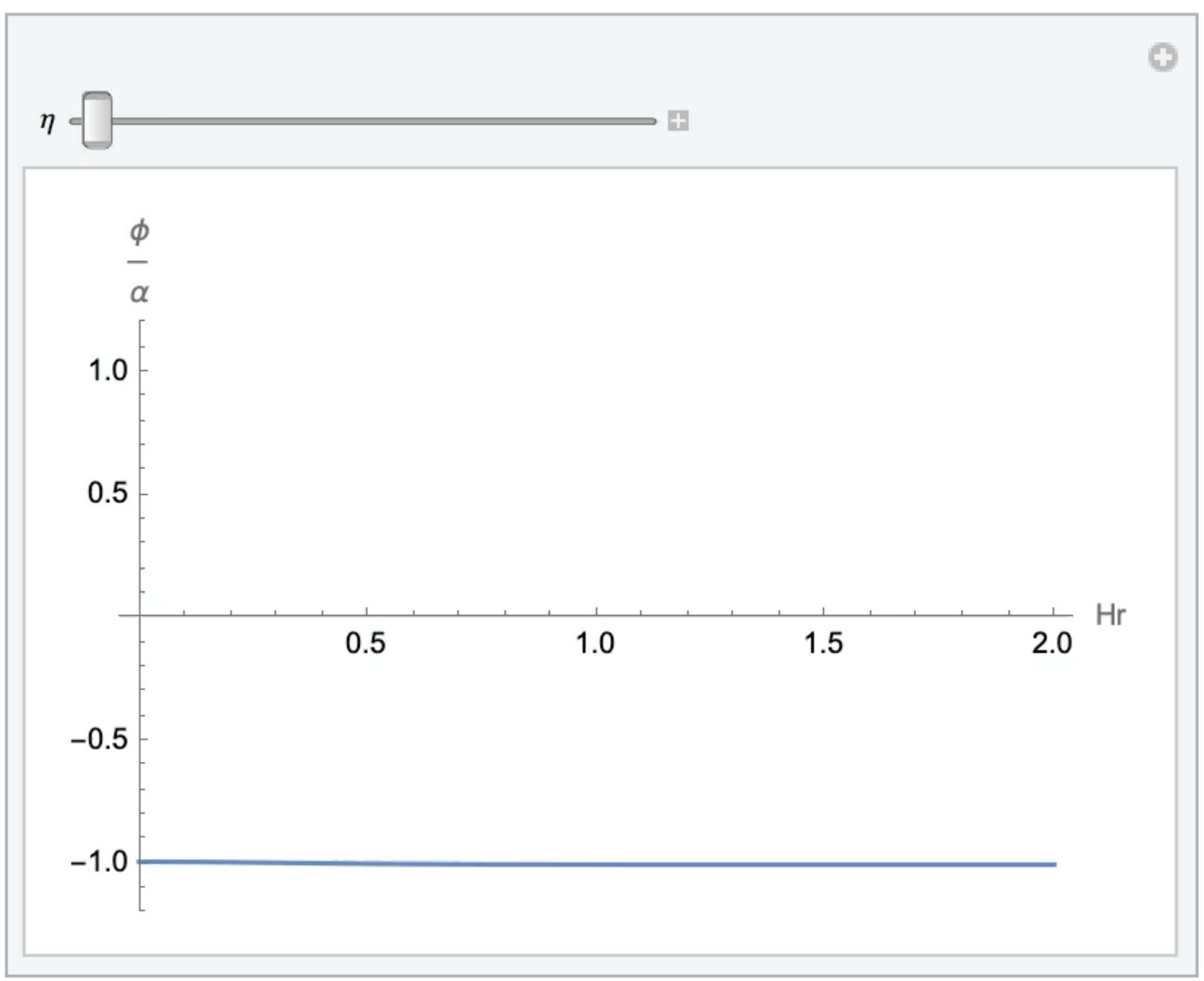
- 実はEuclidean AdSの対称性を持つ方程式。

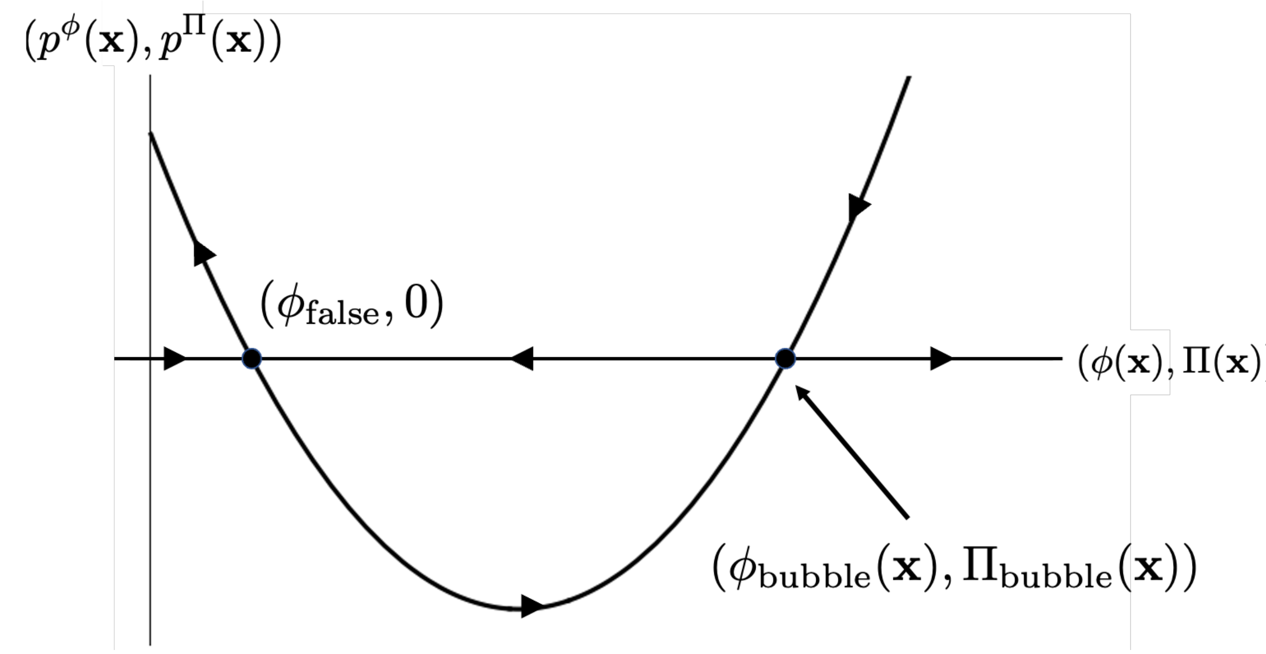
偽の真空からバブル生成まで

- O(4)対称性を課すと $\dfrac{d^2\phi}{d\rho^2} + \dfrac{3}{\tanh\rho}\dfrac{d\phi}{d\rho} = \dfrac{V'}{H^2}$
- 境界条件は $\lim_{\rho\to\infty}\phi = -\alpha, \quad \left.\dfrac{d\phi}{d\rho}\right|_{\rho=0} = 0$



(η, r)における時間発展





偽の真空から時間発展して
バブルが生成された！

HM VS CDL

- 数値計算のために以下のようなポテンシャルを考えた。

$$V(\phi) = \frac{g^2}{4}\left[(\phi^2 - \alpha^2)^2 + \frac{4\beta}{3}(\alpha\phi^3 - 3\alpha^3\phi - 2\alpha^4)\right]$$

- 一様な場合(HM)とバブルが生成される場合の作用の比を取ると

$$\gamma := \frac{I_{bubble}}{I_{HM}} = \frac{3\alpha^2 H^2}{\pi \Delta V \varepsilon}\tilde{I} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{36}{\pi(1-\beta)^3(\beta+3)}\frac{H^2}{\alpha^2 g^2}\tilde{I}$$

$\tilde{I}$：バブル配位に対して得られる数値

- $V(\phi)$ がsteepな時、バブルを生成する配位が支配的になる($\gamma < 1$)。

Eg) $\beta = 0.5,\quad \dfrac{g^2\alpha^2}{H^2} = 140$ の場合、$\gamma = 0.474314/\varepsilon$

- これは虚時間法の場合と整合している。

まとめと今後の展望

まとめ

- Stochastic approachを用いてde Sitter時空中の真空崩壊を記述した。
- MSRJD functional integral を用いて真空崩壊率を定義した。
- HMインスタントンの作用を再現した。
- CDL的な配位を作ることができた。
- CDL配位が、HM配位よりも支配的な場合があることを示した。

今後の展望

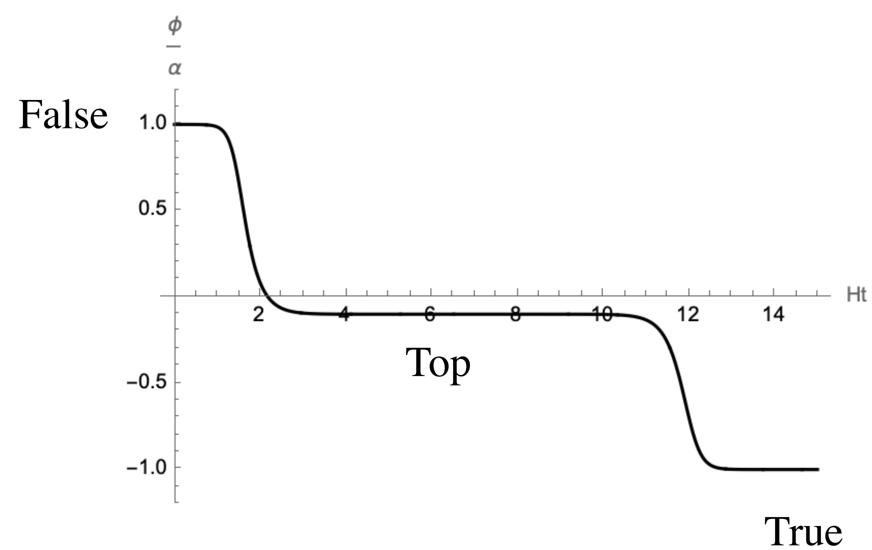
- 虚時間法との関係 (Keldysh formalism ?)
- 特に、Coleman-De Luccia インスタントンとの関係
- 他にもトンネリングを記述するflowがあるか？ ($p^\phi \neq 0, p^\Pi \neq 0$)
- 有限温度効果も取り入れられるか？
- トンネリングを伴うインフレーション模型への応用 (Eg. Chain inflation)

Back up

Hawking-Moss action

- ハミルトニアン

$$H(\phi, p^{\phi}) := -\frac{V'}{3H}p^{\phi} - \frac{H^3}{8\pi^2}(p^{\phi})^2$$



- $H(\phi, p^{\phi}) = 0$ を満たす配位

$$p^{\phi} = 0, \ -\frac{8\pi^2}{3H^4}V'$$

- 非自明な配位 $p^{\phi} \neq 0$ に対する方程式

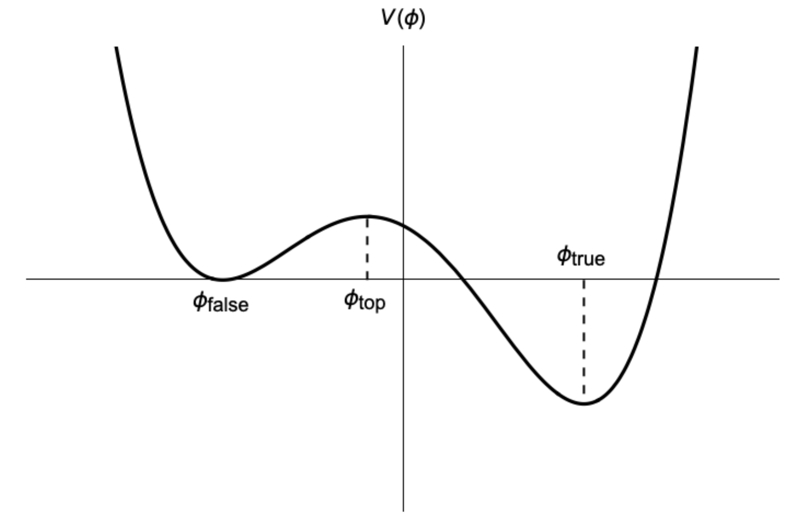
$$\dot{\phi} = \frac{V'}{3H}, \quad (p^{\phi} \neq 0)$$

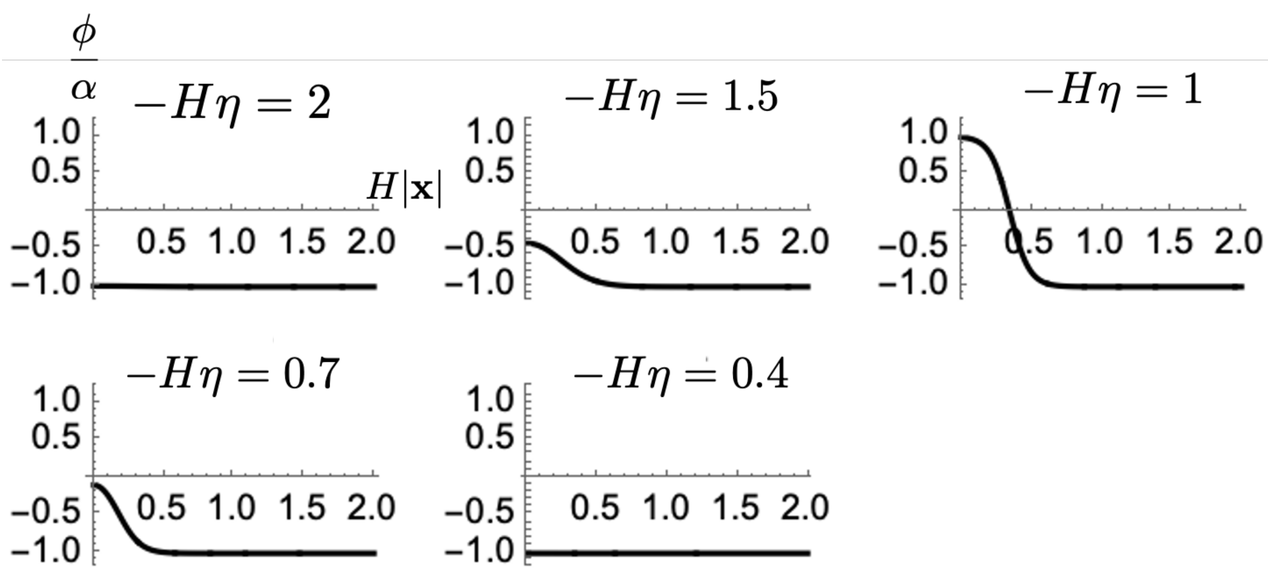
- 非自明な配位 $p^{\phi} \neq 0$ に対する作用

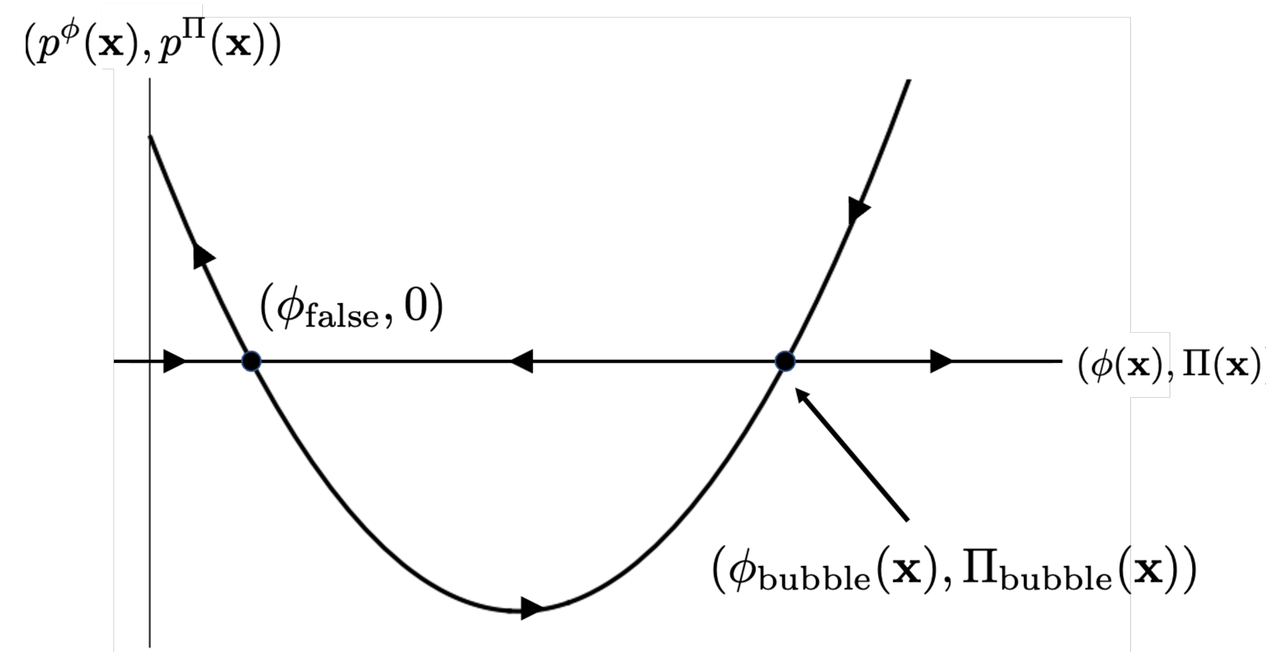
$$I_{HM} = \int dt(p^{\phi}\dot{\phi} - H(\phi, p^{\phi})) = -\frac{8\pi^2}{3H^4}\int_{t'}^{t_*} dt\dot{\phi}V' = -\frac{8\pi^2}{3H^4}\Delta V$$

偽の真空からバブル生成まで

- O(4)対称性を課して $\dfrac{d^2\phi}{d\rho^2}+\dfrac{3}{\tanh\rho}\dfrac{d\phi}{d\rho}=\dfrac{V'}{H^2}$
- 境界条件は $\lim_{\rho\to\infty}\phi=-\alpha,\quad \left.\dfrac{d\phi}{d\rho}\right|_{\rho=0}=0$







偽の真空から時間発展して
バブルが生成された！

バブル配位に対する作用1

- $\varepsilon \gg 1$を仮定
- ノイズ項の近似

$$-\frac{1}{2}\int d^4x' p^{\Pi}(x) G^{\Pi\Pi}(x,x') p^{\Pi}(x') \sim -\frac{H^2\varepsilon}{2} a^3 p^{\Pi}(x)^2 \qquad \left(\frac{\sin(k_c r)}{k_c r} \sim \frac{4\pi^2}{k_c^3}\delta^{(3)}(\mathrm{x}-\mathrm{x}')\right)$$

- ハミルトニアン

$$H(\phi,\Pi,p^{\phi},p^{\Pi}) \simeq a^{-3}\Pi p^{\phi} + (a\nabla^2\phi - a^3V')p^{\Pi} - \frac{H^2\varepsilon}{2}a^3(p^{\Pi})^2$$

- $H(\phi,\Pi,p^{\phi},p^{\Pi}) = 0$ を満たす配位

$$\left(p^{\phi},p^{\Pi}\right) = \left(0,0\right), \left(0,\frac{2}{H^2\varepsilon}(a^{-2}\nabla^2\phi - V')\right)$$

バブル配位に対する作用2

- 非自明な配位 $p^{\Pi} \neq 0$ に対する方程式

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = V' - a^{-2}\nabla^2\phi, \quad (p^{\phi} = 0,\, p^{\Pi} \neq 0)$$

- Euclidean AdS 時空の定義

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dX_0^2 + dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2, \\ &-X_0^2 + X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 = -H^{-2}. \end{aligned}$$

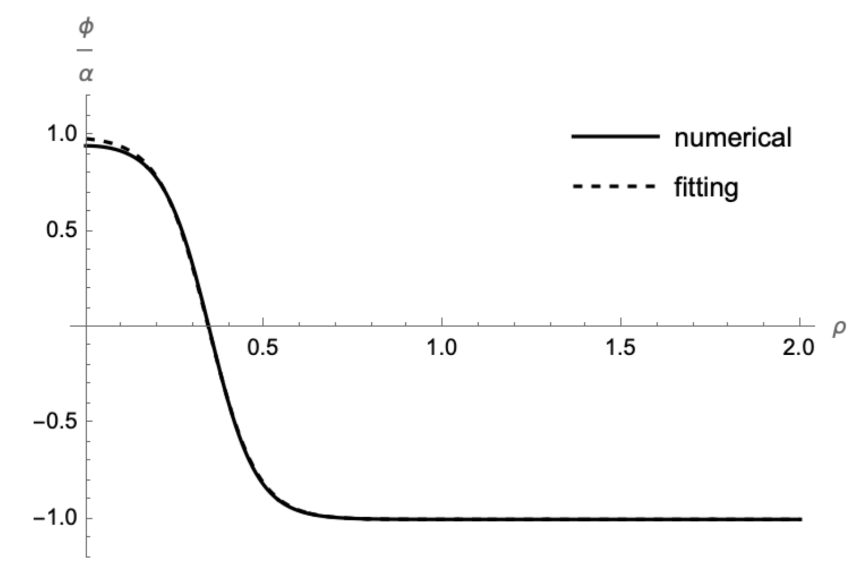
- Euclidean AdS 時空の座標

$$\begin{aligned} ds^2 &= dt^2 + e^{2Ht}d\mathrm{x}^2 \\ &= \frac{1}{H^2\eta^2}(d\eta^2 + d\mathrm{x}^2) \qquad \left(\frac{1}{-H\eta} := e^{Ht}\right) \\ &= H^{-2}(d\rho^2 + \sinh^2\rho\, d\Omega^2) \end{aligned}$$

バブル配位に対する作用3

- O(4)対称性を課した方程式

$$\frac{d^2\phi}{d\rho^2}+\frac{3}{\tanh\rho}\frac{d\phi}{d\rho}=\frac{V'}{H^2}\qquad\left(\rho=\mathrm{arccosh}\left(\frac{1}{2}\frac{H^2(\eta^2+\mathrm{x}^2)+1}{-H\eta}\right)\right)$$



- Fitting function

$$\phi(\rho)=-\alpha\tanh(\mu(\rho-\bar{\rho}))$$

- 非自明な配位 $p^{\Pi}\neq 0$ に対する作用

$$I_{bubble}=-\frac{8\pi}{H^2\varepsilon}\int_{-H\eta(\rho,\theta_1)>1}d\rho d\theta_1\sin^2\theta_1\sinh^3\rho\left[\frac{(\sinh\rho-\cosh\rho\cos\theta_1)^2}{(\cosh\rho-\sinh\rho\cos\theta_1)^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\rho^2}\right.$$
$$\left.+\left\{3\frac{\sinh\rho-\cosh\rho\cos\theta_1}{\cosh\rho-\sinh\rho\cos\theta_1}+\frac{\sin^2\theta_1}{\tanh\rho(\cosh\rho-\sinh\rho\cos\theta_1)^2}\right\}\frac{\partial\phi}{\partial\rho}\right]^2$$
$$:=-\frac{8\pi\alpha^2}{H^2\varepsilon}\tilde{I}(\mu,\bar{\rho})$$

$-H\eta > 1$ の領域