

Book of Abstracts

ヘリシティと時空対称性，古典場から量子場まで

Helicity and space-time symmetry

— a new perspective of
classical and quantum systems

October 5 (Tue)-8 (Fri), 2021 @ Media Center, Osaka City U.

Support:

Osaka City University Advanced Mathematical Institute:

MEXT Joint Usage/Research Center on Mathematics and Theoretical Physics
JPMXP0619217849

Co-organized by

Nambu Yoichiro Institute of Theoretical and Experimental Physics (NITEP), Osaka City University

(2021-10-05, 12:45 version)

Abstracts

Yutaka Matsuo (The University of Tokyo), Akio Sugamoto (Ochanomizu University)	
A description of perfect fluid by Kalb-Ramond field and the duality with Gross Pitaevskii	3
Z. Yoshida (National Institute for Fusion Science), P. J. Morrison (University of Texas at Austin)	
The kinetic origin of the fluid helicity – a symmetry in the kinetic phase space	5
Keith Moffatt (Trinity College, Cambridge)	
Invariance of Helicity and some Topological Implications	7
Carlo F. Barenghi (Newcastle University)	
Helicity and topology of a tangle of vortices	8
Naoki Yamamoto (Keio University) and Di-Lun Yang (Academia Sinica)	
Chiral radiation transport theory of neutrinos	9
Sota Hanai (Keio University), Naoki Yamamoto (Keio University)	
Gravitational waves caused by chiral transport phenomena in neutron stars and supernovae	11
Y. Masada (Aichi University of Education), T. Takiwaki (National Astronomical Observatory of Japan), K. Kotake (Fukuoka University)	
Convection and Dynamo in Newly-born Neutron Stars	13
Koya Shimokawa (Saitama University)	
Untying pathways of vortex knots	14
Ryuji MORITA (Hokkaido University)	
Physics of Optical Vortex and its application	15

Xin LIU (Beijing University of Technology)	
Detecting topology of fluid vortex knots in terms of polynomial invariants constructed from helicity	17
Renzo L. Ricca (U. Milano-Bicocca)	
Minimal unlinking pathways as geodesics in knot polynomial space	18
Kohkichi Konno (National Institute of Technology, Tomakomai College)	
Review of Chern-Simons modified gravity: its effects on compact objects	19
Takahisa Igata (KEK)	
Energy extraction from a rotating black hole	21
K. Maruyoshi (Seikei University)	
Surface defects, vortices and integrable systems	23
Katsunobu Nishihara (Osaka University), Chihiro Matsuoka (Osaka City University), Takayoshi Sano (Osaka University), Francisco Cobos-Campos (Universidad de Castilla-La Mancha), Vasily Zhakhovsky (Rosatom)	
Richtmyer-Meshkov instability and vortices	25
Takayoshi Sano (Osaka University)	
Laser-driven interfacial instabilities in magnetized plasmas	27
Ken ABE (Osaka City University)	
Rigidity of Beltrami fields with a non-constant proportionality factor	29
Chihiro Matsuoka (Osaka City University) and Koichi Hiraide (Ehime University)	
Exact solutions in non-integrable systems	30
Hiroaki Yoshimura (Waseda University)	
Dirac geometry and variational structures in nonequilibrium thermodynamics	32

Linyu Peng (Keio University)	
Continuous symmetries of semi-discrete equations and conserved quantities	34
Yasuhide Fukumoto (Kyushu University), Rong Zou (University of Hawai'i)	
Particle relabeling symmetry and Noether's first and second theorems for fluid and MHD equations	35

A description of perfect fluid by Kalb-Ramond field and the duality with Gross-Pitaevskii

Yutaka Matsuo (The University of Tokyo), Akio Sugamoto (Ochanomizu University)

In this talk, we explain a description of the perfect fluid in terms of a two-form gauge field (Kalb-Ramond field). Nambu proposed such an idea long ago in 1977, and one of the authors (AS) developed the idea further.

In the perfect fluid motion, the vortex keeps the circulation and behaves as a "soliton." In this sense, it is natural to describe the fluid dynamics in terms of the vortices, which were explored long ago by Lund and Regge.

The Kalb-Ramond field couples naturally with the vortex degree of freedom through the integration over the vortex (string) world-sheet. We study the detailed relation between the dynamical degree of freedom of the Euler equation with the Kalb-Ramond field.

We also compare it with the Gross-Pitaevskii equation, giving an alternative description of the fluid motion. We explain that the two descriptions are dual, similar to the electric/magnetic fields in the Maxwell theory. In this sense, we expect to have the strong/weak duality in the two descriptions.

A description of perfect fluid by Kalb-Ramond field and the duality with Gross-Pitaevskii

松尾 泰 (東京大学), 菅本晶夫 (お茶の水代大学)

この講演では理想流体の一つの記述法として 2 階テンソル場 (Kalb-Ramond 場) による記述について説明する。このような記述法の発想は古くももとの提案は南部陽一郎氏による提案があり、その後菅本による研究もなされている。

流体力学の運動において、渦糸の循環が常に保たれる。すなわち渦糸は理想流体においてソリトンの振る舞いを行う。この意味では流体の運動を渦糸を用いて行うことも可能であるはずであり、実際そのような定式化は Lund と Regge により 70 年代に提案が行われている。

Kalb-Ramond 場は渦糸の世界面 (空間的な広がり + 時間発展) と面積分を用いて自然に結合することができる。これをソース項として取り入れることにより流体の Kalb-Ramond 場による記述が可能となる。この提案では以前行われていた研究をさらに進めて流体の変数と Kalb-Ramond 場の対応関係をあからさまに導いた。

またこの定式化と理想流体のもう一つの記述法としてよく知られている Gross-Pitaevskii 方程式を比較した。特にこれら二つの力学変数は、電磁気学における電場と磁場のように、互いに双対なものであることを示した。この意味で GP 方程式と KR 場の記述法は互いに強弱双対の関係になることが予想される。

The kinetic origin of the fluid helicity -- a symmetry in the kinetic phase space

Z. Yoshida (National Institute for Fusion Science)

P.J. Morrison (University of Texas at Austin)

Helicity, a topological degree that measures the winding and linking of vortex lines, is preserved by ideal (barotropic) fluid dynamics. In the context of the Hamiltonian description, the helicity is a Casimir invariant characterizing a foliation of the associated Poisson manifold. Casimir invariants are special invariants that depend on the Poisson bracket, not on the particular choice of the Hamiltonian. The total mass (or particle number) is another Casimir invariant, whose invariance guarantees the mass (particle) conservation (independent of any specific choice of the Hamiltonian). In a kinetic description (e.g. that of the Vlasov equation), the helicity is no longer an invariant (although the total mass remains a Casimir of the Vlasov's Poisson algebra). The implication is that some “kinetic effect” can violate the constancy of the helicity. To elucidate how the helicity constraint emerges or submerges, we examine the fluid reduction of the Vlasov system; the fluid (macroscopic) system is a “sub-algebra” of the kinetic (microscopic) Vlasov system. In the Vlasov system, the helicity can be conserved, if a special *helicity symmetry* condition holds. To put it another way, breaking helicity symmetry induces a change in the helicity. We delineate the geometrical meaning of helicity symmetry, and show that, for a special class of flows (so-called epi-2 dimensional flows), the helicity symmetry is written as $\partial_\gamma = 0$ for a coordinate γ of the configuration space.

<https://arxiv.org/abs/2103.03990>

流体ヘリシティーの運動論的起源 — 運動論位相空間における対称性

吉田善章 (核融合科学研究所)

Philip J. Morrison (テキサス大学オースチン校)

順圧理想流体の保存量であるヘリシティーは、渦線の絡みを計る位相幾何学的指数である。ハミルトン力学の文脈では、ヘリシティーは、ポアソン多様体の葉状構造を特徴付けるカシミール不変量である。カシミール不変量は、ハミルトニアンを選択に依存せず(すなわち系の対称性に関係せず)、ポアソン括弧の代数構造だけに起因する特別な不変量である。ヘリシティーと並んで、全質量(または全粒子数)もカシミール不変量であり、その不変性は(相互作用の在りように関係なく)質量(粒子)の保存を保証している。興味深いことに、運動論的モデルである Vlasov 方程式系でも、全質量は Vlasov-ポアソン代数のカシミール不変量であるが、ヘリシティーはもはや不変量ではない。つまり、何らかの「運動論的効果」がヘリシティーの保存を破ることを意味している。ヘリシティー保存による渦線のトポロジー束縛がどのような運動論的起源をもつのかを解明するために、Vlasov 方程式系から流体モデルへのリダクションで起こる構造変化を分析する。流体(巨視的)システムは、運動論的(微視的) Vlasov 方程式系の「部分代数」であることが知られている。Vlasov 方程式系において、「ヘリシティー対称性」が成り立つ場合、ヘリシティーは保存することが示される。逆に言えば、ヘリシティー対称性を破ると、ヘリシティーに変化が生じる。特別なクラスの流れ場(いわゆる epi-2 次元流)の場合、ヘリシティー対称性は座標空間の座標 γ に対して $\partial_\gamma = 0$ と表すことができる。

<https://arxiv.org/abs/2103.03990>

Invariance of Helicity and some Topological Implications

Keith Moffatt
Trinity College, Cambridge

Abstract

Helicity is a topological invariant of any solenoidal vector field that is transported by (i.e. 'frozen in') a fluid flow. The best known examples are the magnetic field in a perfectly conducting fluid and the vorticity field in an ideal fluid, the latter providing an important invariant of the classical Euler equations of fluid flow. In this lecture, I shall first discuss the historical origin of these invariants, and I will then comment on two complementary problems in which helicity plays a key role: (i) the spontaneous generation of magnetic field (i.e. dynamo action) by turbulence with non-zero mean helicity; and (ii) the relaxation of knotted magnetic flux tubes in a perfectly conducting fluid to minimum-energy states constrained by their topology. Here there is an analogy with the 'tight-knot' problem: what is the minimum length of rope of unit circular cross-section with which a knot of particular type may be tied? There are differences however in that, for the magnetic relaxation problem, it is the volume of the flux tube that is conserved under deformation (and not the area of its cross-section), and the internal twist of the magnetic field affects the minimum-energy state. A particular problem here concerns the possibility of two or more minimum-energy states for a given knot type, and the manner in which a transition from one such state to another may be accomplished. Some aspects of this problem, under current consideration, will be discussed, insofar as time permits.

Helicity and topology of a tangle of vortices

Carlo F. Barenghi

School of Mathematics, Statistics and Physics,
Newcastle University, United Kingdom
and JQC (Joint Quantum Centre Durham-Newcastle)

We address the question as to whether turbulence contains vortex knots in a context which is simpler than ordinary fluids: the context of superfluid helium. Unlike what happens in ordinary Navier-Stokes fluids (where vorticity is a continuous field), in superfluid helium quantum mechanics constraints the vorticity to individual (discrete) vortex lines. Quantum turbulence is therefore a disordered tangle of vortex lines. Since the vortex core thickness is many orders of magnitude smaller than the average distance between vortex lines in typical experiments, the vortex tangle can be modelled using the classical Biot-Savart law and the assumption that vortex lines reconnect [1] when they collide (as seen in the experiments), a mesoscale level of description called the Vortex Filament Model (VFM).

After numerically generating a state of turbulence in a statistical-steady state, we exploit the discrete nature of the vorticity to instantaneously associate an Alexander polynomial to each vortex loop. The degrees of the Alexander polynomials can thus be used to quantify the complexity of the turbulence, revealing a highly knotted distribution [3].

In the last part of the lecture I shall discuss the classical definition of helicity [2] in the context of superfluid helium. In particular, I shall show that the classical definition of helicity is consistent with what we know microscopically about the superfluid vortex core from N-body quantum mechanics, without the difficulties which arise in the simpler mean-field approach of Gross-Pitaevskii theory. I shall show that helicity, compute in the VFM, captures the physical difference [4] between the two forms of quantum turbulence which have been identified in experiments and numerical simulations.

References

- [1] L. Galantucci & al, *Proc. Nat. Sci. USA* **116**: 12204, 2019
- [2] K.H. Moffatt, *J. Fluid Mech.* **35**: 117, 1969.
- [3] R.G. Cooper & al, *Sci. Reports* **9**: 10545, 2019.
- [4] L. Galantucci & al, *Phys. Rev. A* **103**: 144503, 2021.

Chiral radiation transport theory of neutrinos

Naoki Yamamoto^{1a} and Di-Lun Yang^b

^a*Department of Physics, Keio University, Japan*

^b*Institute of Physics, Academia Sinica, Taiwan*

Abstract

One of the most important properties of neutrinos in the Standard Model of particle physics is the chirality. Although neutrinos are considered to play important roles in the dynamics of core-collapse supernovae, this property has been completely neglected in the conventional neutrino transport theory. Recently, we have systematically constructed the radiation transport theory incorporating the effects of chirality of neutrinos based on the underlying quantum field theory. This is the chiral radiation transport theory [1].

In this talk, we first give a brief introduction to transport phenomena due to the chirality of elementary particles, called chiral transport phenomena. One of its consequences is the chiral plasma instability, which generates a magnetic field with magnetic helicity from the chirality imbalance of fermions. We then discuss applications of the chiral radiation transport theory for neutrinos in core-collapse supernovae, and in particular, its possible implications for the origins of magnetars and pulsar kicks [2].

References

- [1] N. Yamamoto and D. L. Yang, *Astrophys. J.* **895**, 56 (2020) [[arXiv:2002.11348 \(astro-ph.HE\)](#)].
- [2] N. Yamamoto and D. L. Yang, [[arXiv:2103.13159 \(hep-ph\)](#)]; work in preparation.

¹nyama@rk.phys.keio.ac.jp

ニュートリノのカイラル輻射輸送理論

山本 直希^{*1} (慶應義塾大学), 楊 迪倫 (中央研究院)

概要

素粒子の標準模型におけるニュートリノの最も重要な性質の一つがカイラリティである。ニュートリノは重力崩壊型超新星爆発のダイナミクスに重要な役割を果たすと考えられているものの、この性質は従来のニュートリノ輸送理論では全く無視されていた。最近、我々は場の量子論に基づき、ニュートリノのカイラリティの効果を取り入れた輻射輸送理論であるカイラル輻射輸送理論を系統的に構築した [1]。

本講演では、まず素粒子のカイラリティによって生じる輸送現象であるカイラル輸送現象について導入を行う。このような輸送現象の帰結の一つが、素粒子のカイラリティから磁気ヘリシティをもった磁場を生成するカイラルプラズマ不安定性である。さらに、超新星におけるニュートリノのカイラル輻射輸送理論の応用、特に、マグネターやパルサーキックの起源を説明する可能性 [2] について議論する。

参考文献

- [1] N. Yamamoto and D. L. Yang, *Astrophys. J.* **895**, 56 (2020) [[arXiv:2002.11348 \(astro-ph.HE\)](#)].
- [2] N. Yamamoto and D. L. Yang, [[arXiv:2103.13159 \(hep-ph\)](#)]; work in preparation.

^{*1} nyama@rk.phys.keio.ac.jp

Gravitational waves caused by chiral transport phenomena in neutron stars and supernovae

Sota Hanai, Naoki Yamamoto (Keio University)

Exploring the internal structure of neutron stars is an important issue in astrophysics. Asteroseismology is a method to study the inside of stars by analyzing their seismic oscillations. These oscillations are classified according to their physical origins, such as p-modes due to pressure, g-modes due to buoyancy, and so on. In the case of neutron stars, gravitational waves are expected to be emitted induced by these seismic oscillations.

In recent years, chiral transport phenomena caused by the chirality of relativistic quarks have been vigorously discussed in the context of quark-gluon plasmas created in relativistic heavy-ion collisions experiments. Typical examples are the chiral magnetic effect, which is the current in the direction of the magnetic field, and the chiral vortical effect, which is the current in the direction of the vorticity. It is known that these chiral transport phenomena induce collective excitations called chiral magnetic waves and chiral vortical waves, respectively.

In this talk, we will show that chiral magnetic waves are generated in the electron matter inside neutron stars, and examine their properties. In particular, we will discuss the effect of electron mass on the chiral waves. We will estimate the frequency of new types of gravitational waves produced by these chiral magnetic waves and the possibility of observations. We will also show the possible existence of the other type of gravitational waves induced by the propagation of chiral vortical waves in the core of supernovae.

中性子星・超新星内部のカイラル輸送現象に起因した重力波

花井奏太, 山本直希 (慶應義塾大学)

中性子星の内部構造を解明することは、宇宙物理学において重要な課題である。こうした天体の内部構造を推測する方法に、星震を解析する星震学がある。この振動は、圧力に起因する p モード、浮力による g モードなど、その物理的な起源によって分類されている。特に中性子星のようなコンパクト天体からは、星震に伴って重力波が放出されると期待されている。

ところで、近年、相対論的重イオン衝突実験で実現される超高温物質クォーク・グルーオン・プラズマにおいて、相対論的なクォークのカイラリティに起因するカイラル輸送現象が精力的に議論されている。その代表的な例が、磁場方向のカレントであるカイラル磁気効果や、渦度方向のカレントであるカイラル渦効果である。そしてこれらのカイラル輸送現象に伴って、それぞれカイラル磁気波、カイラル渦波と呼ばれる波が誘起されることが知られている。

本講演では、中性子星内部の電子物質においてカイラル磁気波が生じることを示し、その性質を見る。特に電子質量の効果によって生じるカイラリティのフリップについて考察する。またこうしたカイラル磁気波によって生じる新たなタイプの重力波の振動数の評価を行い、その観測可能性についても議論する。超新星のコアが回転している場合には、カイラル渦波が生じ、それに伴う別の新たな重力波が生じることを見る。

Y. Masada (Aichi U. Edu.), T. Takiwaki (Natl. Astron. Obs. Japan),
K. Kotake (Fukuoka U.)

Title: Convection and Dynamo in Newly-born Neutron Stars

Abstract: Neutron stars (NSs) have the most extreme magnetic field in the universe, typically trillion, up to quadrillion times more powerful than Earth's. Although, we know, they are formed as an aftermath of massive stellar core-collapse, the origin of the magnetic field is still an outstanding issue in astrophysics. Mainly, two possible origins have been proposed: fossil field and dynamo field hypotheses. While the former regards it as an inheritance from NS's main sequence progenitor, the later presumes that it would be generated by some dynamo processes in newly-born NSs, also known as proto-neutron stars (PNSs). Although significant progress has been made in the study of the PNS dynamo, the origin of the diversity of NS's magnetic fields remains to be solved. *“What physics is responsible for the diversity of NS's magnetic fields?”* To answer this question, we are now studying the properties of the convection and resultant dynamo in the PNS with the aid of numerical simulation. In this talk, we will present the results of our latest PNS dynamo simulations and the physics behind them, and also discuss the Beltrami structure of the flow and magnetic field, which is a natural consequence of the dynamo process.

政田洋平 (愛教大), 滝脇知也 (国立天文台), 固武慶 (福岡大)

題目：原始中性子星における対流・ダイナモ

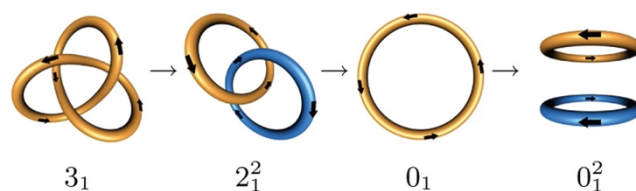
日本語要旨：超新星爆発の際、その中心核として形成される原始中性子星 (PNS) では、ニュートリノ放射とそれがもたらすレプトン数の非一様性に起因して組成対流が駆動される。対流の速さは約 1000km/s, PNSの密度が核物質と同等であることを考慮すると、その運動エネルギーは 10^{30} erg/cm³に達する。PNSの内部は電磁流体近似が可能であり、レプトン駆動型対流の自然の帰結として、磁場が生成・増幅されることが予想されてきた (e.g., Thompson & Duncan 1993)。単純なエネルギー等分配を仮定すると、生成される磁場の強度は 10^{15} G 程度になることが期待され、超強磁場中性子星 (マグネター) 級の磁場の自然な説明を与える。一方、PNSにおける磁場の生成・増幅が普遍的だとすると、通常のパルサー (10^{12} G) の説明に困難が生じるという問題も内在する。中性子星磁場とその多様性の起源を明らかにするために、我々はPNSにおける磁場の生成・増幅機構、すなわち”PNSダイナモ機構”を、現実的な内部構造モデルと核物質の状態方程式を用いたMHDダイナモ計算で系統的に調べている。本講演では、我々の最新のPNSダイナモシミュレーションの結果とその背後にある物理を紹介するとともに、ダイナモ過程の自然な帰結として生じる流れと磁場のベルトラミ構造についても議論する。

Untying pathways of vortex knots

Koya Shimokawa

Department of Mathematics, Saitama University

In this talk we will analyze untying pathways of vortex knots by applying knot theory. The topology of entangled vortices is represented using oriented knots and links, and the reconnection of vortices is modeled using a coherent band surgery of knots and links. For the case where the topology of the vortex is a torus knot or link $T(2,p)$, we characterize the untying pathway, and determine where the reconnection occurs.



Reference

[1] *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **110**, 20906-20911 (2013)

[2] *Sci. Rep.* **7**, 12420 (2017)

Untying pathways of vortex knots

下川 航也

埼玉大学大学院理工学研究科

渦が作る結び目が繋ぎ換え（リコネクション）により解かれることが観察されている。この講演では、その様子を結び目理論を用いて解析する。渦のトポロジーを向きづけられた結び目や絡み目を用いて表し、渦の繋ぎ換えを整合的なバンド手術を用いてモデル化する。渦のトポロジーがトーラス結び目・絡み目 $T(2,p)$ の場合について、その解消の経路の特徴付けと、その解消がどのように起こるかを決定する。

Physics of Optical Vortex and its application

Ryuji MORITA

Department of Applied Physics, Hokkaido University

Optical vortices (OVs), such as Laguerre-Gaussian modes, whose spatial phase depends on the azimuthal coordinate, have attracted much attention because of their unique properties. Possessing a phase singularity on their beam center, they carry the orbital angular momentum proportional to the topological charge, which is expressed by the value of the line integral of the spatial phase around the singular point. Thanks to these properties, they are used in the various applications such as laser processing, laser trapping/manipulation, quantum information processing, classical communications, super-resolution microscopy, and nonlinear spectroscopy. In the presentation, giving an overview of physical properties of OVs, we will discuss the interaction between OVs and materials from the viewpoint of orbital angular momentum, spin angular momentum, total angular momentum and helicity.

光渦の物理とその応用

森田 隆二 (北海道大学)

「光渦」は波動方程式の近軸近似のもとでの固有解である **Laguerre-Gauss** モードに代表される、位相特異点を有する光波である。光渦はよく定義された軌道角運動量を持つことが示されて以来、光トラッピング、光マニピュレーション、光通信、超解像顕微鏡、量子情報処理、天文光学、レーザー加工、非線型分光などの分野において多くの応用がなされつつある。本講演では、光渦に関してその性質を概観するとともに、光渦と物質との相互作用による得意な構造形成実験結果に関してヘリシティ、全角運動量、軌道角運動量、スピン角運動量の観点から議論する。

Detecting topology of fluid vortex knots in terms of polynomial invariants constructed from helicity

XIN LIU

*Institute of Theoretical Physics, Faculty of Sciences,
Beijing University of Technology, P.R. China
E-mail: xin.liu@bjut.edu.cn*

ABSTRACT

Helicity is the most important topological invariant in fluid mechanics, a conserved quantity for the Euler equation and the only integral invariant for volume-preserving diffeomorphic transformations^[1]. From vortex filaments viewpoint, helicity provides access to characterize fluid knot topology. In the seminal work of Moffatt^[2], then extended by Moffatt & Ricca^{[3][4]}, the relationship between helicity and knot linking numbers was revealed; since then linking number interpretation of helicity has played a key role in the study of the topological hierarchy of entangled fluid vortex knots. With the discovery of highly complex knots in superfluid turbulence^[5] linking numbers and crossing numbers are proven to be no longer sufficient to detect topological complexity and changes in topology due to reconnections^[6]. More powerful tools from knot theory are thus needed; for this reason we have derived Jones and HOMFLYPT knot polynomials from helicity^{[7][8]}. In this talk we present a brief introduction to our derivation, emphasizing the role played by writhe and twist helicity in the polynomial skein relations.

This is joint work with Renzo L. Ricca (U Milano-Bicocca, Italy).

- [1] Enciso A., Peralta-Salas D. & Torres de Lizaur F. 2016 Helicity is the only integral invariant of volume-preserving transformations. *PNAS USA* **113**, 2035.
- [2] Moffatt H.K. 1969 The degree of knottedness of tangled vortex lines. *J. Fluid Mech.* **35**, 117.
- [3] Moffatt H.K. & Ricca R.L. 1992 Helicity and the Călugăreanu invariant. *Proc. R. Soc. A* **439**, 411.
- [4] Ricca R.L. & Moffatt H.K. 1992 The helicity of a knotted vortex filament. In *Topological Aspects of the Dynamics of Fluids and Plasmas* (ed. H.K. Moffatt et al.), pp. 225–236. Kluwer Acad. Publ.
- [5] Cooper R.G., Mesgarnezhad M., Baggaley A.W. & Barenghi C.F. 2019 Knot spectrum of turbulence, *Sci. Rep.* **9**, 10545.
- [6] Kleckner D., Kauffman L.H. & Irvine W.T.M. 2016 How superfluid vortex knots untie, *Nature Phys.* **12**, 650–655.
- [7] Liu X. & Ricca R.L. 2012 The Jones polynomial for fluid knots from helicity. *J. Phys. A: Math. & Theor.* **45**, 205501.
- [8] Liu X. & Ricca R.L. 2015 On the derivation of HOMFLYPT polynomial invariant for fluid knots. *J. Fluid Mech.* **773**, 34–48.

Minimal unlinking pathways as geodesics in knot polynomial space

RENZO L. RICCA

Department of Mathematics & Applications, U. Milano-Bicocca, Italy

E-mail: renzo.ricca@unimib.it

ABSTRACT

During evolution fluid structures, such as linked and knotted vortex filaments in classical or quantum systems, decay naturally by a series of reconnection events through a process of consecutive topological simplifications. The process bears similarities with the DNA unlinking scenario studied in recombinant DNA plasmids [1]. By applying adapted knot polynomials, such as Jones and HOMFLYPT derived from helicity [2,3], we show that a topological cascade can be described as a geodesic flow in an appropriate knot polynomial space [4]. Each point of this space coincides with the knot type given by the polynomial value, that for moderate crossing number (≤ 9) identifies uniquely knot types. For the sake of example we consider adapted Jones polynomials with metric given by the inner product of Legendre polynomials. Unlinking pathways can thus be identified with geodesics on this space, and optimal decay paths measured by associated probability. Results are very promising, showing an interesting connection with the logarithmic behavior associated with the groundstate energy spectrum of tight knots and links [5].

This is joint work with Xin LIU (BJUT, China) and Xinfei LI (Guangxi UST, China).

- [1] Stolz R., Yoshida M., Brasher R., Flanner M., Ishihara K., Sherratt D.J., Shimokawa K. & Vazquez M. 2017 Pathways of DNA unlinking: A story of stepwise simplification. *Nature Sci. Rep.* **7**, 12420.
- [2] Liu X. & Ricca R.L. 2015 On the derivation of HOMFLYPT polynomial invariant for fluid knots. *J. Fluid Mech.* **773**, 34-48.
- [3] Liu X. & Ricca R.L. 2016 Knots cascade detected by a monotonically decreasing sequence of values. *Nature Sci. Rep.* **6**, 24118.
- [4] Liu X., Ricca R.L. & Li X-F. 2020 Minimal unlinking pathways as geodesics in knot polynomial space. *Nature Comm. Phys.* **3**, 136.
- [5] Ricca R.L. & Maggioni F. 2014 On the groundstate energy spectrum of magnetic knots and links. *J. Phys. A: Math. & Theor.* **47**, 205501.

Review of Chern-Simons modified gravity: its effects on compact objects

Kohkichi Konno

National Institute of Technology, Tomakomai College

In recent years, many modified gravity theories have been investigated to seek the ultimate gravitational theory. Among them, Chern-Simons modified gravity is strongly suggested as an effective theory by two promising quantum gravity theories and by an extension of the standard model. Furthermore, Chern-Simons modified gravity is consistent with the recent results of gravitational wave detection.

In the present talk, I will briefly review Chern-Simons modified gravity from the fundamental part of this theory to recent topics. Chern-Simons corrections play an important role around rotating compact objects. Thus I focus on the effects of Chern-Simons modified gravity on compact objects in this talk.

Review of Chern-Simons modified gravity: its effects on compact objects

金野 幸吉

独立行政法人国立高等専門学校機構

苫小牧工業高等専門学校

近年、究極的な重力理論を模索する観点から、一般相対論を超えた重力理論が活発に研究されている。その中で、チャーン・サイモン修正重力は、量子重力の2つの候補理論と標準理論の拡張との両者から強く示唆され、最新の重力波検出の結果からも有効場理論として残りえる理論であるということが分かってきた。

本講演では、チャーン・サイモン修正重力の基礎理論の部分から最近の動向までを簡単にレビューする。特にチャーン・サイモン修正重力は、回転を伴うコンパクトな重力源において、その効果が最も顕著となる。そこで、本講演ではコンパクト天体における影響に焦点を当てる。

Energy extraction from a rotating black hole

Takahisa Igata^{1,*}

¹*KEK Theory Center, Institute of Particle and Nuclear Studies,
High Energy Accelerator Research Organization, Tsukuba 305-0801, Japan*

ABSTRACT

No material body or light ray never can be extracted from a black hole. However, Penrose found that energy can be extracted from a rotating black hole [1]. In this talk, I will introduce an energy extraction mechanism from a rotating black hole that reconciles these seemingly contradictory statements (see, e.g., [2] for a review). The energy extraction mechanism mediated by a free electromagnetic field, the Blandford–Znajek process [3], has been widely believed to be a viable mechanism for relativistic jet formation because it achieves a large energy flux. From a spacetime perspective, the dynamics of magnetic field lines in a force-free magnetic field can be identified with the dynamics of strings [4, 5]. Using this fact, we will argue that the physical picture of the Blandford–Znajek process by a stationary axisymmetric force-free electromagnetic field is equivalent to the energy extraction process by a rigidly rotating Nambu-Goto string [6].

-
- [1] R. Penrose, Gravitational collapse: the role of general relativity, *Rev. Nuovo Cimento*, **1**, 252 (1969).
 - [2] J. P. Lasota, E. Gourgoulhon, M. Abramowicz, A. Tchekhovskoy, and R. Narayan, Extracting black-hole rotational energy: The generalized Penrose process, *Phys. Rev. D* **89**, 024041 (2014) [arXiv:1310.7499 [gr-qc]].
 - [3] R. D. Blandford and R. L. Znajek, Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **179**, 433 (1977).
 - [4] T. Uchida, Theory of force-free electromagnetic fields. I. General theory, *Phys. Rev. E* **56**, 2181 (1997).
 - [5] S. E. Gralla and T. Jacobson, Spacetime approach to force-free magnetospheres, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **445**, 2500 (2014) [arXiv:1401.6159 [astro-ph.HE]].
 - [6] S. Kinoshita and T. Igata, The essence of the Blandford–Znajek process, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2018**, 033E02 (2018) [arXiv:1710.09152 [gr-qc]].

* igata@post.kek.jp

回転ブラックホールからのエネルギー引き抜き

伊形 尚久^{1,*}

¹ 高エネルギー加速器研究センター 素粒子原子核研究所 理論センター

講演要旨

物体や光は、一度ブラックホールに落ちてしまうと、二度と取り出すことはできない。しかしながら、ペンローズによれば、エネルギーを回転ブラックホールから取り出すことは可能である [1]。本講演では、この一見矛盾した主張を両立させる、回転ブラックホールからのエネルギーを取り出す機構を紹介する (例えば [2])。フォースフリー電磁場によってこの機構が媒介される Blandford–Znajek 過程 [3] は、大きなエネルギーフラックスを実現し得ることから、相対論的ジェット形成のメカニズムとして広く受け入れられている。一般相対論の枠組みを用いることで、フォースフリー電磁場の磁力線のダイナミクスは、ストリングのダイナミクスとみなすことができる [4, 5]。この事実を利用して、定常軸対称なフォースフリー電磁場に対する Blandford–Znajek 過程の物理的描像が、剛体回転する南部–後藤ストリングによるエネルギー引き抜き過程と等価であることを議論する [6, 7]。

-
- [1] R. Penrose, Gravitational collapse: the role of general relativity, *Rev. Nuovo Cimento*, **1**, 252 (1969).
 - [2] J. P. Lasota, E. Gourgoulhon, M. Abramowicz, A. Tchekhovskoy, and R. Narayan, Extracting black-hole rotational energy: The generalized Penrose process, *Phys. Rev. D* **89**, 024041 (2014) [arXiv:1310.7499 [gr-qc]].
 - [3] R. D. Blandford and R. L. Znajek, Electromagnetic extraction of energy from Kerr black holes, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **179**, 433 (1977).
 - [4] T. Uchida, Theory of force-free electromagnetic fields. I. General theory, *Phys. Rev. E* **56**, 2181 (1997).
 - [5] S. E. Gralla and T. Jacobson, Spacetime approach to force-free magnetospheres, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **445**, 2500-2534 (2014) [arXiv:1401.6159 [astro-ph.HE]].
 - [6] S. Kinoshita and T. Igata, The essence of the Blandford–Znajek process, *Prog. Theor. Exp. Phys.* **2018**, 033E02 (2018) [arXiv:1710.09152 [gr-qc]].
 - [7] 木下俊一郎, 伊形尚久, ブラックホールからエネルギーを引き抜く: Blandford–Znajek 機構の本質, *日本物理学会誌*, 2019年8月号 542–550頁.

* igata@post.kek.jp

Surface defects, vortices and integrable systems

K. Maruyoshi (Seikei U.)

Abstract:

In this talk, we discuss surface defects in a certain class of four-dimensional supersymmetric gauge theories, and a related vortex solution, in relation with the integrable lattice model. A surface defect has a support on a two-dimensional surface in the space-time. A typical surface defect is defined by the coupling with two-dimensional field theory on the surface or by the singular condition on the gauge field around the origin of the perpendicular direction. It is known that such a surface defect in four-dimensional supersymmetric gauge theory is realized as the low energy limit of the vortex solution of certain $U(1)$ gauge theory associated with the original four-dimensional theory. By using this construction, we compute the partition functions of the supersymmetric gauge theory with the surface defect. It turns out that certain partition functions are identified with the transfer matrices of some integrable lattice models. We argue the reasons of this correspondence, and its application. This talk is based on the collaboration with Junya Yagi, and on arXiv:1606.01041, and the collaboration with Toshihiro Ota and Masahito Yamazaki, work in progress.

Surface defects, vortices and integrable systems

丸吉一暢 (成蹊大)

講演概要：

本公演では 4 次元超対称性を持つゲージ理論における表面ディフェクト、および Vortex 解と、可解格子模型との関係について議論する。表面ディフェクトは 4 次元時空上の 2 次元面にサポートを持つディフェクトである。典型的な表面ディフェクトは、面上の 2 次元理論との結合、もしくは、面に依存したゲージ場の特異な条件をもって定義される。超対称ゲージ理論での表面ディフェクトは、その理論に関係した $U(1)$ 理論の Vortex 解の低エネルギー極限として得られることが知られている。この構成法を利用し、表面ディフェクトを含んだゲージ理論の分配関数を計算することができる。得られた分配関数のいくつかは、可積分性を持つ 2 次元格子模型における転送行列と一致することを紹介する。これらの 2 次元格子模型は 4 次元超対称性を持つゲージ理論とは全く異なるものであり、一致する理由やこの関係の応用について議論する。本講演は、八木絢彌氏との共同研究：[arXiv:1606.01041](https://arxiv.org/abs/1606.01041) と、太田敏博氏・山崎雅人氏との共同研究に基づく。

Richtmyer-Meshkov instability and vortices

Katsunobu Nishihara¹, Chihiro Matsuoka², Takayoshi Sano¹,
Francisco Cobos-Campos³, Vasily Zhakhovsky⁴

¹Institute of Laser Engineering, Osaka University,

²Laboratory of Applied Mathematics, Osaka City University,

³Instituto de Investigaciones Energeticas and CYTEMA, Universidad de Castilla-La
Mancha,

⁴Dukhov Research Institute of Automatics, Rosatom

When an incident shock wave hits a corrugated interface, ripples are induced on the transmitted and reflected shocks. Due to the refraction of fluids crossing the rippled shock fronts, the velocity shear left at the interface behind the shocks. The Richtmyer-Meshkov instability occurs due to the shear flow at the corrugated interface. In linear regime, i.e., the distances among the interface and shock fronts are not large, the rippled shock fronts and the corrugated interface interact each other thorough sound wave and entropy wave. However it is known that the shock ripples and sound wave decay exponentially and the perturbation becomes incompressible. There exists an asymptotic linear growth rate. But fluids are not irrotational and vortices remain in the bulk between the shocks [1,2].

We investigated the nonlinear dynamics of RMI by developing a non-uniform vortex sheet model [3]. In RMI, bulk vortices are generated behind the rippled shocks. We here consider more generally nonlinear interactions between a non-uniform vortex sheet with point vortices. It will be shown that the nonlinear interaction between a non-uniform vortex sheet and point vortices as unstable and the mixing will be enhanced [4].

- [1] R. D. Richtmyer, *Commun. Pure Appl. Math*, **13**, 297 (1960); E. E. Meshkov, *Fluid Dyn.* **4**, 101 (1972); Y. Zhou, *Phys. Rep.* **720-722**, 1 (2017).
- [2] K. Nishihara *et al* *Philos. Trans. R. Soc. A* **368**, 1769 (2010) ; G. Wouchuk and K. Nishihara, *Phys. Plasmas*, **3**, 3761 (1996); *ibid* **4**, 1028 (1997).
- [3] C. Matsuoka, K. Nishihara and Y. Fukuda, *Phys. Rev. E* **67**, 036301 (2003), C. Matsuoka and K. Nishihara, *Phys. Rev. E*, **73**, 053304 (2006).
- [4] C. Matsuoka and K. Nishihara, *Phys. Plasmas*, **27**. 052305 (2020).

リヒトマイヤー・メシュコフ不安定性と渦
(Richtmyer-Meshkov instability and vortices)

西原 功修¹, 松岡 千博², 佐野 孝好¹, Francisco Cobos-Campos³,
Vasily Zhakhovsky⁴

¹大阪大学レーザー科学研究所,

²大阪市立大学数学研究所,

³Instituto de Investigaciones Energeticas and CYTEMA, Universidad de Castilla-La
Mancha,

⁴Dukhov Research Institute of Automatics, Rosatom

密度の跳びがある界面を衝撃波が通過すると透過、および反射衝撃波（あるいは反射膨張波）が形成されるが、リヒトマイヤー・メシュコフ不安定性（RMI）は、界面に凹凸のある場合に生成される衝撃波波面のリップルにより、衝撃波波面を横切る流体は屈折を受け、その結果界面に速度シェアーが生じ、界面の凹凸が時間に比例して成長する不安定性である。線形成長過程、すなわち界面と衝撃波波面の距離が小さいときには、リップル衝撃波波面と凹凸のある界面に挟まれた流体を伝搬すると音波・エントロピー波によって衝撃波波面と界面の凹凸は相互作用することによって波面の形状が時間的に変化する。しかし衝撃波のリップルやこれらの波は指数関数的に減衰し、これらの擾動運動は非圧縮性となり、界面の凹凸は漸近的な成長速度をもつことが知られている。しかしながら流体の回転性は残ります。[1,2]

そこで、我々はこれまで非一様な速度シェアーのある渦シートモデル VSM (Vortex Sheet Model) を開発し、RMI の非線形ダイナミクスを調べてきました[3]。RMI では衝撃波の後面に渦が生成されますが、ここではより一般的に非一様な渦シートと点渦の非線形相互作用を VSM で取り扱い、その非線形発展を調べた結果を紹介します。例えば、非一様速度シェアーのある界面と点渦の相互作用は不安定であり、複雑な界面形状が生成されることが明らかになりました[4]。

[1] R. D. Richtmyer, *Commun. Pure Appl. Math.*, **13**, 297 (1960); E. E. Meshkov, *Fluid Dyn.* **4**, 101 (1972); Y. Zhou, *Phys. Rep.* **720-722**, 1 (2017).

[2] K. Nishihara *et al* *Philos. Trans. R. Soc. A* **368**, 1769 (2010) ; G. Wouchuk and K. Nishihara, *Phys. Plasmas*, **3**, 3761 (1996); *ibid* **4**, 1028 (1997).

[3] C. Matsuoka, K. Nishihara and Y. Fukuda, *Phys. Rev. E* **67**, 036301 (2003), C. Matsuoka and K. Nishihara, *Phys. Rev. E*, **73**, 053304 (2006).

[4] C. Matsuoka and K. Nishihara, *Phys. Plasmas*, **27**. 052305 (2020).

Laser-driven interfacial instabilities in magnetized plasmas

Takayoshi Sano (Institute of Laser Engineering, Osaka University)

Extreme plasma states observed in astrophysical phenomena can be created in the laboratory using large laser facilities such as the GEKKO laser at Osaka University. For example, the verification of the metallic hydrogen state under ultra-high pressure comparable to that of Jupiter's interior and the formation of collisionless shocks are being actively pursued. We are conducting laser experiments and MHD simulations on interfacial instabilities in magnetized plasmas associated with supernova explosions. Such phenomena are very important processes in laser fusion plasmas to realize ideal implosion. Therefore, there is an urgent need to understand the mechanisms that suppress the growth of interfacial instabilities. In this talk, I introduce our laser astrophysics experiments and theoretical understandings on the amplification of magnetic fields by the Richtmyer-Meshkov instability [1-3].

References:

- [1] T. Sano, Alfvén number for the Richtmyer-Meshkov instability in magnetized plasmas, *Astrophys. J.* in press (2021)
- [2] T. Sano et al., Laser astrophysics experiment on the amplification of magnetic fields by shock-induced interfacial instabilities, *Phys. Rev. E* 104, 035206 (2021)
- [3] T. Sano et al., Suppression of the Richtmyer-Meshkov instability due to a density transition layer at the interface, *Phys. Rev. E* 102, 013203 (2020)

レーザー駆動衝撃波を用いた磁化プラズマ中での界面流体不安定

佐野孝好(大阪大学レーザー科学研究所)

大阪大学の激光 XII 号レーザーのような大型レーザー施設を使って、天体現象で観測される極限的なプラズマ状態を実験室で作ることができます。例えば、木星内部に匹敵する超高圧下での金属水素状態の検証や、無衝突衝撃の形成などが積極的に進められています。また、超新星爆発に伴う磁化プラズマの界面不安定性について、レーザー実験や MHD シミュレーションを行っています。このような現象は、レーザー核融合プラズマにおいて、理想的な爆縮を実現する上でも非常に重要なプロセスです。したがって、界面不安定性の成長を抑制する機構について理解が急務になっています。本講演では、我々が行っているレーザー天体物理学の実験と、リヒトマイヤー・メシュコフ不安定性による磁場の増幅に関する理論的理解を紹介します[1-3]。

参考文献:

- [1] T. Sano, Alfvén number for the Richtmyer-Meshkov instability in magnetized plasmas, *Astrophys. J.* in press (2021)
- [2] T. Sano et al., Laser astrophysics experiment on the amplification of magnetic fields by shock-induced interfacial instabilities, *Phys. Rev. E* 104, 035206 (2021)
- [3] T. Sano et al., Suppression of the Richtmyer-Meshkov instability due to a density transition layer at the interface, *Phys. Rev. E* 102, 013203 (2020)

RIGIDITY OF BELTRAMI FIELDS WITH A NON-CONSTANT PROPORTIONALITY FACTOR

KEN ABE

Beltrami fields $\text{curl } u = fu$, $\text{div } u = 0$ appear as steady states of ideal incompressible flows or plasma equilibria. I will discuss existence and non-existence issues on them for non-constant factor f . In the first half of the talk, I will explain existence of axisymmetric Beltrami fields forming vortex rings and their construction via a variational principle. In the second half, I will discuss a rigidity problem on symmetry of u for symmetric f and a relation with Grad's conjecture. This talk is based on preprints arXiv:2008.09345, arXiv:2108.03870.

非定数係数を持つベルトラミ場の剛性

阿部健

非圧縮理想流, プラズマ平衡で現れるベルトラミ場 $\text{curl } u = fu$, $\text{div } u = 0$ について比例係数 f が非定数となる場合の解の存在と非存在を考える. 講演の前半では軸対称ベルトラミ場からなる渦輪と変分原理による解の構成について説明する. 後半では比例係数 f に対称性がある場合に u の対称性が得られるかという剛性の問題を考え, グラドの予想との関係を考察する. 本講演はプレプリント arXiv:2008.09345, arXiv:2108.03870 に基づく.

(K. ABE) DEPARTMENT OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE, OSAKA CITY UNIVERSITY, 3-3-138 SUMIYOSHI-KU OSAKA, 558-8585, JAPAN

E-mail address: kabe@osaka-cu.ac.jp

Exact solutions in non-integrable systems

Chihiro Matsuoka¹ and Koichi Hiraide²

¹*Osaka City University* and ²*Ehime University*

We present exact solutions in non-integrable systems, taking the Henon map as an example. The solutions are constructed using the Laplace transform. Unlike integrable systems such as soliton systems, the obtained solutions cannot be described by any existing functions. We visualize a boundary of KAM tori and the Henon attractor by use of the obtained functions, in which chaotic orbits are captured accurately.

非可積分系における厳密解

松岡千博 (大阪市大), 平出耕一 (愛媛大)

エノン写像を例にとって、非可積分系における厳密解を与える。解はラプラス変換を用いて構成される。ここで用いる構成方法は Resurgent analysis と呼ばれる、変数係数常微分方程式の大局解を導くために開発された手法を拡張したものである。ソリトン系のような完全可積分系とは異なり、得られた解は既存の関数では記述できない。講演では、ハミルトン系に出現する KAM トーラスの境界や、散逸系カオスの代表であるエノンアトラクターを得られた関数を用いて描き、馬蹄構造やホモクリニック点といったカオスを特徴づける構造が正確に捉えられていることを示す。

Dirac geometry and variational structures in nonequilibrium thermodynamics

Hiroaki Yoshimura

Waseda University, Tokyo, Japan

Abstract

A Dirac structure is a geometric object of unifying symplectic and Poisson structures. In mechanics, for the case of degenerate Lagrangian systems with nonholonomic constraints, which are linear in velocities, given as a distribution on a configuration manifold Q , it is known that an induced (almost) Dirac structure over the Pontryagin bundle $P = TQ \oplus T^*Q$ can be defined from the given distribution.

On the other hand, a general class of nonholonomic systems with nonlinear constraints may be formulated by a general Lagrange-d'Alembert principle by introducing variational constraints $C_V \subset TQ \oplus TQ$ as well as nonlinear kinematic constraints $C_K \subset TQ$, in which case one cannot define any appropriate geometric structure such as Poisson, symplectic as well as Dirac structures for such a general class of nonholonomic systems with nonlinear constraints.

In this talk, we study a class of nonholonomic systems with nonlinear constraints of thermodynamic type, in which C_K can be mathematically deduced from C_V . For the cases of nonholonomic systems with nonlinear constraints of thermodynamic type, we show that an induced Dirac structure $D_P \subset TP \oplus T^*P$ can be defined from C_V and therefore a Dirac dynamical system can be introduced by using D_P . We also show that there exists an associated variational structure with the Dirac dynamical system. In thermodynamics, such a class of nonlinear nonholonomic constraints typically appears in the relation of entropy production regarding the second law of thermodynamics. Finally, we show that We illustrate our theory with some examples of nonequilibrium thermodynamic systems for the case of adiabatically closed and open cases.

This is a joint work with François Gay-Balmaz in École Normale Supérieure in Paris.

非平衡熱力学の変分構造とディラック幾何

吉村 浩明

早稲田大学 基幹理工学部

概要

ディラック構造は、シンプレクティック構造とポアソン構造を統一した幾何学的概念であり、力学では、速度に関して線形な性質を有する非ホロノミック拘束を受ける、退化ラグランジュ系において典型的に現れることが知られている。すなわち、配位空間 Q 上の拘束ディストリビューションとして与えられる非ホロノミック拘束と正準シンプレクティック構造によって、ポントリヤーギン束 $P = TQ \oplus T^*Q$ 上にディラック構造が定義でき、これを用いて非ホロノミック系はディラック力学系として定式化できる。

一般的な非線形かつ非ホロノミックな拘束を有する力学系では、非線形拘束 $C_K \subset TQ$ とは別に、変分拘束 $C_V \subset TQ \oplus TQ$ を導入することによって、一般化ラグランジュ・ダランベール原理の枠組みで定式化できるが、その背後には、ポアソン構造、シンプレクティック構造、さらには、ディラック構造さえも存在しないことが知られている。

本講演では、 C_K が C_V によって規定できる、いわゆる熱力学的なタイプの非線形拘束を受ける非ホロノミック系について考察し、その場合は、力学系の幾何的構造として、 P 上のディラック構造 $D_P \subset TP \oplus T^*P$ が定義できることを示す。その上で、 D_P を用いてディラック力学系を定義し、その背後にある変分構造を明らかにする。このタイプの非線形な非ホロノミック拘束は、熱力学の第2法則に関連する、エントロピー生成の関係式として典型的に現れる。そこで、具体例として、断熱閉鎖系及び開放系の非平衡熱力学を幾つか例にとり、本研究で提案したディラック力学系による定式化手法の有効性を示す。

この研究は、パリ高等師範学校 (ENS) の François Gay-Balmaz 博士との共同研究に基づくものである。

OCAMI 研究集会

講演題目：半離散方程式の連続対称性と保存量

発表者：彭 林玉（慶應義塾大学）

講演要旨：1880年代に、ソフス・リーは、常微分方程式の可解性において連続変換がどのような役割を果たしているかについての研究を開始しました。それから、1世紀以上経ました。現在は微分方程式の可積分性と十分な対称性（ある解を別の解に移す連続変換）または十分な保存量の存在すること関連深いのがよく知っています。変分方程式の場合ではネーターの定理に従ってそれらが一対一で対応しています。

一方、多くの力学および物理現象は、戸田格子などの半離散方程式としてモデル化できます。ただし、ある連続変換の微分と差分両方を含む変数への延長が本質的な課題であり、何十年にもわたっても半離散方程式の対称性理論は十分に確立されていません。この講演では、半離散方程式の対称性の一般的な理論を確立して、ネーターの（第一と第二）定理を半離散方程式に拡張できるようにことを示します。本講演の一部は、Peter Hydon 教授（ケント大学）との共同研究に基づいています。

Title: Continuous symmetries of semi-discrete equations and conserved quantities

Speaker: Linyu Peng (Keio University)

Abstract: During the 1880s, Sophus Lie started his study on what role continuous transformations play in the solvability of ordinary differential equations. Nowadays, we know it well that solvability or integrability of differential equations is greatly due to the existence of sufficient symmetries, i.e., continuous transformations moving one solution to another solution, or sufficient conserved quantities. For variational equations, they are connected to each other according to the celebrated Noether's theorem in a one-to-one manner.

On the other hand, many mechanical and physical systems can be modeled as semi-discrete equations, such the Toda lattice. However, symmetries of semi-discrete equations have not been well established because prolonging a transformation to variables involving both derivatives and shifts has been the essential challenge, that has bothered scholars for decades. In this talk, we will show how this problem is eventually solved that allows us to extend Noether's two theorems to semi-discrete equations. This talk is partially related to joint work with Peter Hydon (University of Kent).

Particle relabeling symmetry and Noether's first and second theorems for fluid and MHD equations

Yasuhide Fukumoto

Institute of Mathematics for Industry, Kyushu University, Japan

Rong Zou

Department of Civil & Environmental Engineering, University of Hawai'i
at Mānoa, USA

For the ideal fluid dynamics and magnetohydrodynamics (MHD), Noether's theorem states that the topological invariant associated with the particle relabeling symmetry is the cross helicity, the volume integral of the scalar product of the velocity field and a frozen-in field. A proof to it is given in terms of variation of the Lagrangian label as a function of the Eulerian position. According to Noether's second theorem, the existence of the topological invariant implies redundancy of the governing equations. The generalized Bianchi identity reflecting it is derived for MHD.

Particle relabeling symmetry and Noether's first and second theorems for fluid and MHD equations

福本康秀 (九州大学マス・フォア・インダストリ研究所)

Rong Zou (ハワイ大学土木・環境工学科)

変分原理において、粒子のラベル付け替え対称性に付随する保存量がトポロジカル不変量で、ネーターの定理は、理想流体と電磁流体 (MHD) に対して、トポロジカル不変量はクロス・ヘリシティに限ることをいう。クロス・ヘリシティの定義は、速度場と凍結場 (= 渦度場) の内積の全領域にわたる体積積分である。これに対し、オイラー的位置の関数としてのラグランジュラベルの変分を用いた証明を与える。ネーターの第2定理によれば、トポロジカル不変量の存在は、支配方程式に冗長性があることを意味し、支配方程式間の関係をあらわす一般化されたビアンキ恒等式が導かれる。